



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Modelación de derivados europeos con distribuciones no gaussianas

Andrés Mauricio Molina Barreto

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas.
Bogotá, Colombia
2014

Modelación de derivados europeos con distribuciones no gaussianas

Andrés Mauricio Molina Barreto

Tesis de grado presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias Matemática Aplicada

Director:

José Alfredo Jiménez Moscoso

Línea de Investigación:

Finanzas Cuantitativas

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

2014

A mis padres.

Agradecimientos

Para el desarrollo de este importante proyecto de vida, fue necesaria la ayuda y el aporte de muchas personas de mi aprecio y respeto. Inicialmente deseo agradecer al profesor José Alfredo Jiménez del Departamento de Matemáticas, por su infinita paciencia conmigo y el apoyo incondicional para seguir adelante con este trabajo. Sus consejos fueron claves para no desanimarme en varios problemas del desarrollo de esta tesis y su guía imprescindible en la línea de mi carrera. Gracias a él, pude adentrarme en este maravilloso campo de la matemática moderna como es el de las finanzas cuantitativas. Agradezco al profesor Mauricio Ruiz por su influencia durante mi pregrado para entrar al programa de maestría en Matemática Aplicada y sus importantes consejos. También debo agradecer al comité del congreso internacional de ciencias actuariales y finanzas cuantitativas *ICASQF* 2014, por darme la oportunidad de presentar parte de este trabajo como poster, ya que de parte de reconocidos investigadores internacionales recibí importantes comentarios positivos para ajustar los modelos de esta tesis. A los jurados anónimos de la revista *Cuadernos de Economía* por sus comentarios y recomendaciones acerca de los modelos aquí propuestos.

Agradecer a mis padres, por su amor y constante apoyo. A mis más cercanos amigos por guardarme tanta admiración que sirvió como combustible para trabajar cada día. A mi hermano Juan Pablo, por su curiosidad y opiniones en el desarrollo del documento. A mis compañeros de la maestría Edwin y Diego. Y lo más importante, agradezco a Dios por darme la salud suficiente para poder seguir estudiando después de una grave crisis de la que me levantó más fuerte aún. Bendiciones a todos.

Resumen

El modelo Black-Scholes (1973) para valoración de opciones europeas es ampliamente usado en el mercado debido a su fácil implementación. Sin embargo, hay evidencia empírica que contradice los supuestos básicos del modelo Black-Scholes tales como que el retorno del activo tiene una distribución de probabilidad lognormal. Varios investigadores han trabajado en nuevas fórmulas de valoración de derivados suponiendo diferentes distribuciones ya sea para el precio del activo subyacente o para el retorno del mismo. El objetivo de este trabajo es analizar fórmulas para valoración de derivados europeos que son más generales y permiten mayor flexibilidad sobre las distribuciones del activo subyacente. Los trabajos Corrado & Su (1996) ajustan la distribución del activo incluyendo la asimetría y exceso de curtosis; mientras Savickas (2002) supone que la distribución es Weibull. Frente a estos supuestos, se proponen fórmulas modificadas de valoración al introducir parámetros de localización y escala a las distribuciones del activo. Se presentan resultados numéricos comparando estos modelos y la volatilidad implícita de los precios de las opciones.

Palabras clave: valoración, opciones, distribución Weibull, mixtura de Weibull, mixtura de lognormales, asimetría, curtosis.

Abstract

The Black- Scholes (1973) valuation model for European options is widely used in the market due to its easy implementation. However, there is empirical evidence that contradicts the basic assumptions of the Black- Scholes model such as the return of the asset has a lognormal probability distribution. Several researchers have worked on new valuation formulas assuming different distributions for either the price of the underlying asset or for the return. The aim of this work is to analyze valuation formulas for European derivatives that are more general and allow greater flexibility on the distributions of the underlying asset. In Corrado & Su (1996) it is adjusted the asset distribution by adding the effect of skewness and leptokurtosis, while Savickas (2002) states that the distribution is Weibull. Given these assumptions, it was modified valuation formulas proposing to introduce location and scale parameters to the distributions of the asset. Numerical results are presented comparing these models and the implied volatility of option prices.

Keywords: valuation, options, Weibull distribution, mixture of Weibull, mixture of

lognormal, skewness, kurtosis.

Aportes de la tesis

En el capítulo 2 se presentan los conceptos preliminares de los conceptos de valoración de derivados financieros junto con los modelos clásicos y los modelos con los cuales se desea comparar las propuestas hechas en este trabajo. En el capítulo 3 se establecen las fórmulas a partir de distribuciones no gaussianas que es el objetivo principal del trabajo. Como novedad, se presenta una fórmula de valoración a partir de distribuciones de Weibull, trabajo que fue presentado para su publicación en la revista *Cuadernos de Economía* con visto bueno para publicación a espera de presentar correcciones de estilo y escritura. En el capítulo 4 se desarrollan los modelos numéricos para comprobar la utilidad de las fórmulas propuestas y su estabilidad. En el capítulo 5 se plantean los nuevos problemas a abordar y las conclusiones de este trabajo. Finalmente, se presenta el apéndice con las demostraciones de todas las fórmulas propuestas en esta tesis.

Contenido

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
Lista de símbolos	XIII
1. Introducción	1
2. Preliminares	4
2.1. Opciones Europeas	4
2.2. Modelo Black Scholes	6
2.3. Distribuciones neutrales al riesgo.	9
2.4. Mixtura de normales	9
2.5. Modelo con distribución Weibull	11
2.6. Modelo de Jarrow y Rudd	13
2.7. Modelo de Corrado y Su	14
3. Valoración de opciones mediante uso de distribuciones no gaussianas	16
3.1. Mixtura de distribuciones lognormales	16
3.2. Distribución Weibull propuesta	18
3.3. Mixtura de Weibull	19
3.4. Griegas	19
3.4.1. Griegas en Black Scholes	20
3.4.2. Griegas de la fórmula mixtura de lognormales	20
3.4.3. Griegas de la fórmula de Weibull propuesta	21
3.4.4. Griegas de la fórmula de mixtura de Weibull	21
4. Modelación y estimación numérica	22
4.1. Estimación de parámetros.	22
4.1.1. Minimización de errores cuadráticos	22
4.1.2. Estimación de parámetros por método de momentos	23
4.2. Resultados numéricos	24
4.3. Valoración de opciones	28

4.4.	Comparación numérica de modelos	32
4.4.1.	Volatilidad implícita	38
4.5.	Análisis numérico de las griegas	42
5.	Conclusiones y recomendaciones	47
5.1.	Conclusiones	47
5.2.	Recomendaciones	48
6.	Apéndice	49
6.1.	Fórmulas de valoración	49
6.1.1.	Modelo de mixtura de lognormales	49
6.1.2.	Modelo de Weibull	52
6.1.3.	Modelo de mixtura de Weibull	53
6.2.	Griegas de las fórmulas de valoración	54
6.2.1.	Griegas de la mixtura de lognormales	54
6.2.2.	Griegas del modelo de Weibull	56
6.2.3.	Griegas mixtura de Weibull	58
	Bibliografía	60

Lista de símbolos

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidades
A	Parámetro de localización	Mismas unidades a la muestra
B	Parámetro de escala	Mismas unidades a la muestra
b	Parámetro de escala de la distribución Weibull	Mismas unidades a la muestra
c	Parámetro de forma de la distribución Weibull	Sin unidades
S	Precio del activo subyacente	Unidades monetarias
R	Retorno del activo	Sin unidades
r	Tasa de interés libre de riesgo	Sin unidades
K	Precio de ejercicio o strike	Unidades monetarias
X	Precio futuro del activo subyacente	Unidades monetarias
C	Valor opción de compra o call	Unidades monetarias
P	Valor opción de venta o put	Unidades monetarias

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidades
α	Peso de la mixtura	Sin dimensión
Γ	Función Gamma	N.A
μ	Media del activo o del retorno	Unidades monetarias
σ	Volatilidad	Sin dimensión
θ	Vector de parámetros de la distribución	Según distribución
τ	Tiempo de vencimiento	Años

Símbolo	Término	Unidades
Φ	Función de acumulación normal estándar	N.A
φ	Función de densidad normal estándar	N.A

Abreviaturas

Abreviatura	Término
ATM	<i>At the money</i> En el dinero
ITM	<i>In the money</i> Dentro del dinero
OTM	<i>Out of the money</i> Fuera del dinero

1 Introducción

En 1973 Fisher Black y Myron Scholes presentaron su modelo de valoración de opciones europeas, dando comienzo a un estudio formal en cuanto al tratamiento matemático de los derivados. Su fórmula fue muy bien recibida y fue premiada con el premio Nobel en economía en 1997. La simplicidad de su fórmula radica en el hecho que el precio de una opción europea solo depende de cinco variables: el precio actual del activo subyacente, el precio de ejercicio o precio strike, la fecha de vencimiento, la volatilidad del activo y la tasa de interés libre de riesgo. Con estos datos, es posible determinar de forma cerrada el precio de cualquier opción siempre y cuando toda la información este disponible. Los supuestos necesarios para este modelo están basados sobre el comportamiento estocástico del precio del activo subyacente. En Black & Scholes (1973) se supone que el precio sigue un movimiento Browniano geométrico a través del tiempo con lo cual el activo queda con una distribución lognormal. De esta manera, el retorno es normalmente distribuido, pero la evidencia empírica muestra que esto no es cierto. En el mercado al observar los precios de la opciones, la volatilidad implícita muestra sonrisa (*smile*) o mueca (*smirk*), determinando que la volatilidad no es constante como lo supone el modelo Black-Scholes. Para mejorar el modelo, se han utilizado varios enfoques. El primero es añadir una nueva dinámica al proceso del precio del activo, tales como saltos estocásticos (Merton 1973) o volatilidad estocástica (Heston 1993). Aunque es el más preciso, es computacionalmente muy costoso al tener que aproximar la solución por métodos numéricos. Otro enfoque es estimar la función de densidad del activo a partir de los datos existentes en el mercado, tales como los modelos de Jarrow & Rudd (1982) o Corrado & Su (1996); estos modelos que ajustan el precio de las opciones observando que las distribuciones de los subyacentes presentan asimetría y exceso de curtosis. Por ejemplo Savickas (2002) propone una distribución distinta para el precio del subyacente, que en vez de ser lognormal, es Weibull de dos parámetros. Esto debido a que la distribución Weibull presenta colas más pesadas que la lognormal para casi todos los parámetros de la distribución. También se ha observado que la distribución de los precios del subyacente puede presentar un comportamiento bimodal, por lo que ninguna de las distribuciones arriba planteada puede ser la apropiada para modelar su comportamiento. Bahra (1997) introduce una fórmula de valoración con una mixtura de distribuciones lognormales para el precio del activo. Así, junto con los precios de las opciones observados puede encontrar un estimador para la distribución neutral al riesgo (RND). Es importante observar que la fórmula propuesta por Bahra, es una combinación lineal convexa de dos precios de tipo Black Scholes, permitiendo que este modelo siga con los supuestos básicos acerca del comportamiento del activo. De esta manera,

la distribución puede ser más flexible a presentar colas más pesadas, y suponer volatilidad no constante.

Das & Sundaram (1999) muestra que se debe tener en cuenta las medidas de asimetría y curtosis a la hora de determinar los precios de los derivados. Un buen acercamiento es ajustar una distribución asimétrica como la distribución $g-h$ de Tukey (Jiménez, Arunachalam & Serna 2014) y así encontrar los precios de las opciones. En este trabajo, se desea proponer modificaciones a los modelos ya existentes, añadiendo a la distribución neutral al riesgo dos parámetros nuevos (localización y escala) a la mixtura de lognormales y al modelo de Weibull. También se propone, con esta misma metodología, usar una mixtura de distribuciones Weibull, aún no utilizada para la valoración de opciones europeas. El uso de mixturas de distribuciones Weibull tiene las mismas ventajas que el modelo de mixturas lognormales, ya que estas también pueden presentar bimodalidad, colas más pesadas que una lognormal simple, rapidez en la estimación de parámetros, y ser también una combinación lineal convexa de dos precios de opciones mediante el modelo de Weibull. Esta distribución solo se ha usado en modelación de fallas de componentes electrónicos, pero tiene buenas propiedades para este campo.

Para la comparación de estos modelos, se analizan precios de opciones del índice S&P 500, porque según Rubinstein (1994) estableció que en éste mercado el modelo Black Scholes es más preciso. Incluso la mayor parte de bibliografía hace uso de este mercado para comparar sus resultados. En el entorno Black Scholes, se observa que la volatilidad implícita es mayor para opciones deep-out-the-money y para deep-in-the-money. Al realizar experimentos numéricos con las fórmulas planteadas, se observa lo contrario. Es decir, la volatilidad disminuye para opciones con un *moneyness* (relación entre el precio de ejercicio y el precio actual del activo subyacente) mayor.

El alcance de este estudio, depende de la cantidad de datos disponibles en el mercado, para poder comparar las fórmulas. Todo el desarrollo se fijó en encontrar fórmulas cerradas, asumiendo que la distribución no es lognormal, y que el retorno tiene asimetría y exceso de curtosis. A diferencia de los modelos de volatilidad estocástica, se presenta fórmulas más interesantes en el sentido que no hay que utilizar métodos numéricos para aproximar el precio de las opciones como en el modelo de Heston. El trabajo se distribuye de la siguiente manera: En el capítulo 2 se presentan los conceptos preliminares de los conceptos de valoración de derivados financieros junto con los modelos clásicos y los modelos con los cuales se desea comparar las propuestas hechas en este trabajo. En el capítulo 3 se establecen las fórmulas a partir de distribuciones no gaussianas que es el objetivo principal del trabajo. Como novedad, se presenta una fórmula de valoración a partir de distribuciones de Weibull, trabajo que fue presentado para su publicación en la revista **Cuadernos de Economía** con visto bueno para publicación a espera de presentar correcciones de estilo y escritura. En el capítulo 4 se desarrollan los modelos numéricos para comprobar la utilidad de las fórmulas propuestas y su estabilidad. En el capítulo 5 se plantean los nuevos problemas a abordar y las conclusiones de este trabajo. Finalmente, se presenta el apéndice con las demostraciones

de todas las fórmulas propuestas en esta tesis.

2 Preliminares

2.1. Opciones Europeas

Un derivado es un instrumento financiero cuyo valor depende del activo sobre el cual está escrito. A este activo se le llama subyacente; este puede ser una acción, una tasa de cambio, un índice bursátil o incluso, otro derivado. En el mercado de derivados sobresalen los futuros y las opciones. Una opción permite a una de las partes negociantes, el derecho de comprar (*call*) o vender (*put*) cierto activo subyacente a un precio determinado previamente llamado precio de ejercicio (*strike*) en una fecha futura. Si la opción sólo se puede ejercer en una fecha fija se dice que la opción es de tipo europeo, pero si esta se puede ejercer antes de la fecha de vencimiento se le dice opción americana.

Sea S_T el precio del activo subyacente en la fecha de vencimiento de la opción T , y K el precio de ejercicio. Definimos los *payoff* de una opción de compra (venta) como

$$\begin{aligned} f_1(S_T, T) &= \max\{S_T - K, 0\} && \text{Comprar} \\ f_2(S_T, T) &= \max\{K - S_T, 0\} && \text{Vender} \end{aligned} \quad (2-1)$$

El derecho que se obtiene por una opción debe ser pagado previamente, a este valor se le conoce como *prima*. Sea C el valor de esta prima por una opción de compra, y P por una de venta. El beneficio en la fecha de vencimiento puede ser representado gráficamente como:

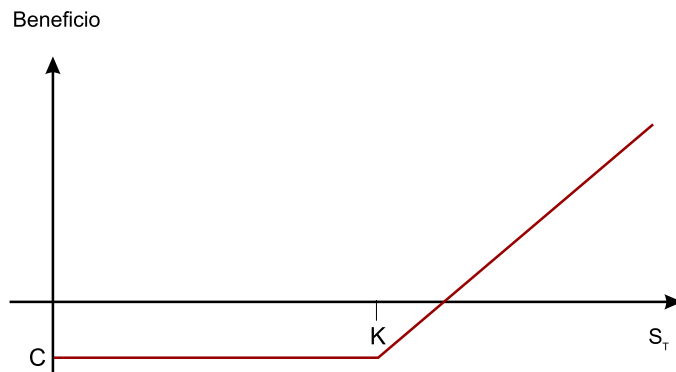


Figura 2-1: Beneficio de una opción de compra

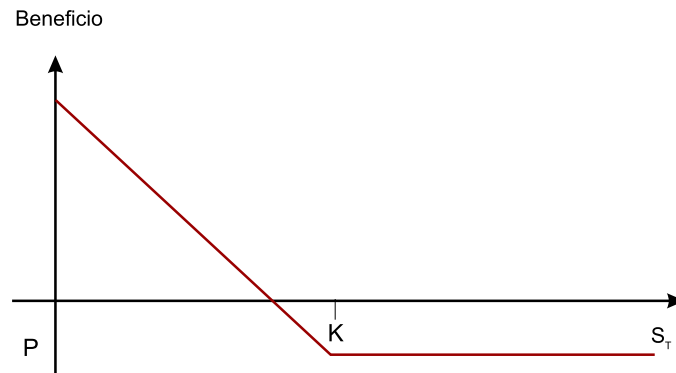


Figura 2-2: Beneficio de una opción de venta

Los gráficos representan la situación desde el punto de vista del comprador. En ambos casos, la pérdida máxima es la prima de la opción. La parte que vende la opción se llama el emisor. El emisor es quien recibe la prima; los perfiles de beneficio son exactamente los opuestos de las gráficas anteriores.

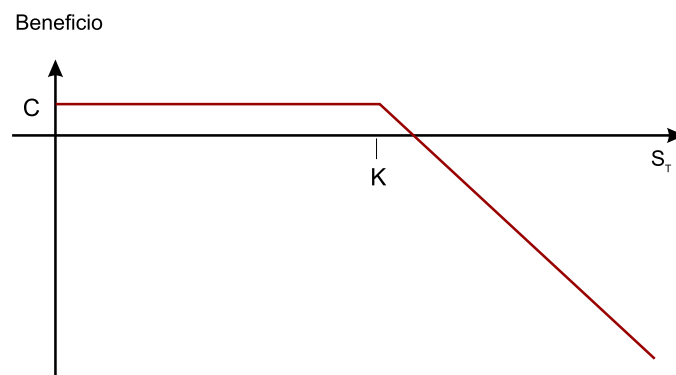


Figura 2-3: Beneficio de una opción de compra para el emisor

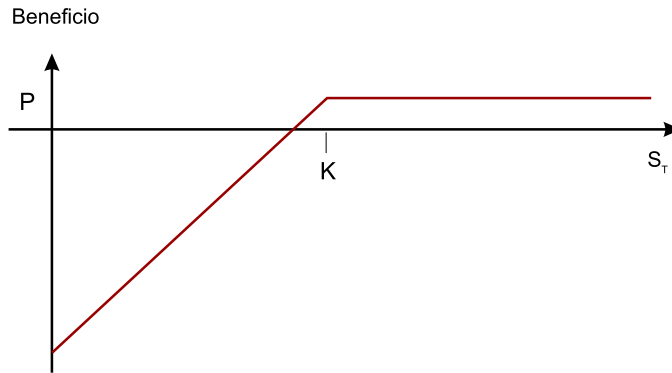


Figura 2-4: Beneficio de una opción de venta para el emisor

En ambos casos, solo hay una pequeña posibilidad de ganancias, con un potencial ilimitado de pérdida. Vender opciones puede ser muy riesgoso, emitir opciones puede ser muy especulativo debido a la potencial naturaleza de pérdida.

2.2. Modelo Black Scholes

En el modelo Black Scholes se supone que el precio de una opción de tipo europeo solo depende de cinco variables: el precio actual del subyacente S_0 , el precio de ejercicio K , el tiempo de vencimiento T , la tasa de interés libre de riesgo r , y la volatilidad σ . Se propuso el siguiente modelo para el precio del subyacente:

Se supone que el precio de un activo se mueve aleatoriamente ya que cumple las *hipótesis de un mercado eficiente*.

1. Toda la información pasada y actual ya está revelada en el precio actual del activo.
2. Los mercados responden inmediatamente a nueva información acerca del activo.

Con estas dos hipótesis se tiene que el activo sigue un *proceso de Markov*.

Se define el **retorno** como el precio actual del activo sobre el precio inicial, es decir $\ln(S_T/S_0)$.

Considere que S es un proceso estocástico en el tiempo, y que cumple la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$$

donde dS es el diferencial de S , μ es la tasa de aumento del activo, σ es conocida como **volatilidad** la cual es desviación estándar del retorno.

W es conocido como un proceso de Wiener que cumple las siguientes propiedades:

1. dW es una variable aleatoria tomada de una distribución normal.
2. $E[dW] = 0$
3. $Var(dW) = dt$

4. $W(0) = 0$

Un proceso de Wiener es un tipo especial de un proceso de Markov. Las propiedades de arriba se pueden interpretar también como

$$dW = \xi_t \sqrt{dt}$$

donde $\xi_t \sim N(0,1)$ y ξ_t es independiente de ξ_s para todo $t \neq s$. El valor esperado y la varianza de dS es:

$$E[dS] = E[\sigma S dW + \mu S dt] = \mu S dt$$

$$Var(dS) = E[dS^2] - E[dS]^2 = \sigma^2 S^2 dt$$

Se dice que los precios siguen un movimiento Browniano geométrico si:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

donde μ y σ son los parámetros de tendencia y difusión, y W es un proceso de Wiener estándar.

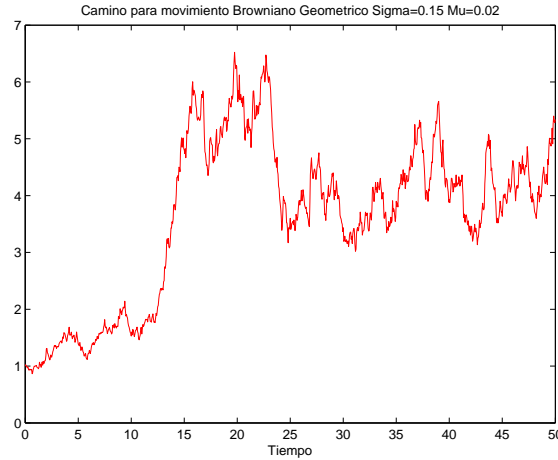


Figura 2-5: Un camino para un movimiento Browniano geométrico

Para poder deducir la ecuación de Black Scholes, es necesario el lema de Ito.

Teorema 1 *Suponga que S cumple la siguiente ecuación diferencial estocástica:*

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

donde $W(t)$ es un proceso de Wiener. Sea $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en su dominio dada por $V = V(S, t)$, entonces se satisface lo siguiente:

$$dV = \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt$$

Se debe usar el lema de Ito para ver como es el proceso que sigue $\ln S$. Si se define $V(S, t) = \ln S$ se tiene que:

$$dV = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma dW$$

por lo que $V = \ln S$ sigue un proceso de Wiener con media $\mu - \sigma^2/2$ y varianza σ^2 . El cambio en $\ln S$ entre el tiempo 0 y el tiempo T , es una distribución normal con media $(\mu - \sigma^2/2)T$ y varianza $\sigma^2 T$.

Esto significa que

$$\ln S_T \sim N(\ln S_0 + (\mu - \sigma^2/2)T, \sigma^2 T)$$

es decir S tiene una distribución lognormal.

En el modelo básico de Black Scholes son necesarios los siguientes supuestos:

- El retorno del activo sigue un proceso de Wiener.
- La tasa de interés libre de riesgo y la volatilidad σ del activo se suponen constantes durante la vigencia de la opción.
- El subyacente no paga dividendos durante la vigencia de la opción.
- No hay posibilidad de arbitraje; es decir, todos los portafolios libres de riesgo deben tener el mismo retorno.
- La venta y los activos son divisibles.

Con estos supuestos y al aplicar el lema de Ito se obtiene el modelo Black Scholes:

Sea $C(S, t)$ el valor de una opción call europea. Entonces $C(S, t)$ debe satisfacer el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 & S \in (0, \infty), t \in [0, T) \\ C(S, T) = \max\{S - K, 0\} & S \in (0, \infty) \end{cases} \quad (2-2)$$

Esta ecuación puede resolverse por el método de variables separables o mediante una traslación Black & Scholes (1973). Por lo tanto:

Sea $C_T(K)$, el precio de la opción de compra europea y sea $P_T(K)$, el precio de la opción de venta con precio de ejercicio K y fecha de vencimiento $\tau = T - t$.

$$\begin{aligned} C_t(K) &= S_0 \Phi(d_1) - K e^{-r\tau} \Phi(d_2) \\ P_t(K) &= K e^{-r\tau} \Phi(-d_2) - S_0 \Phi(-d_1) \end{aligned} \quad (2-3)$$

donde $d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$ y $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$ y Φ representa la función de probabilidad acumulada de una variable aleatoria normal estándar.

En Black & Scholes (1973) se muestra que las opciones pueden ser valoradas, si los inversionistas son neutrales al riesgo lo que implica que la tasa esperada de retorno del activo subyacente μ es igual a la tasa de interés libre de riesgo r .

2.3. Distribuciones neutrales al riesgo.

Al asumir el movimiento Browniano geométrico para el precio del activo subyacente, implica que éste se distribuye normal con media μ y varianza σ^2 en la fecha de vencimiento. Esta distribución se conoce como *distribución de probabilidad neutral al riesgo*, que indica que en un mercado completo el precio de un derivado es el precio descontado del payoff esperado bajo una única medida de riesgo. De acuerdo con Harrison & Pliska (1981), en ausencia de arbitraje el precio de una opción call europea es:

$$\begin{aligned} C_t(K) &= \mathbb{E}[e^{-r\tau} \max\{S_T - K, 0\}] = e^{-r\tau} \mathbb{E}[\max\{S_T - K, 0\}] \\ &= e^{-r\tau} \int_K^\infty (S_T - K) f(S_T) dS_T \end{aligned} \quad (2-4)$$

donde $\mathbb{E}[\cdot]$ es el operador de esperanza neutral al riesgo, condicionado a cualquier información disponible en el momento t , $f(X_T)$ es la función de densidad neutral al riesgo (RND) del subyacente en la fecha de madurez. Como se supone que hay ausencia de arbitraje se debe cumplir la condición de martingala:

$$S_t = e^{-r\tau} \mathbb{E}[S_T]$$

y la desviación estándar de $\ln(X_t)$ es $\sigma\sqrt{t}$

Este resultado implica, que en vez de especificar una dinámica para el precio del activo subyacente, es posible asumir una forma para el funcional de la distribución neutral al riesgo. En Melick & Thomas (1997) se especifica que comenzar con una distribución terminal para el activo es más general que especificar una dinámica para el proceso estocástico porque dada una dinámica ésta sólo implica una distribución única; en cambio, dada una distribución, pueden existir múltiples dinámicas consistentes con la distribución.

2.4. Mixtura de normales

Bahra (1997) considera que la distribución neutral al riesgo para el activo subyacente para opciones es una mixtura de distribuciones lognormales, que es equivalente a suponer que el retorno se distribuye como una mixtura de distribuciones normales. Se dice que X se distribuye con una mixtura de normales $X \sim MixN(\theta)$, $\theta = (p, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2)$ si su función de densidad de probabilidad (*pdf*) es

$$f(x) = pf_1(x) + (1 - p)f_2(x) \quad (2-5)$$

donde

$$f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{x - \mu_i}{\sigma_i} \right]^2 \right\}$$

para $i = 1, 2$.

Si $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ para $i = 1, 2$ entonces Y tiene una distribución de logmixtura de normales o mixtura de lognormales y sus componentes de la función de densidad (pdf) son:

$$f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x} \beta_i} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\ln x - \alpha_i}{2\beta_i} \right]^2 \right\}$$

para $i = 1, 2$. Los parámetros se obtienen como:

$$\alpha_i = \ln S + (\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2)\tau \qquad \beta_i = \sigma_i \sqrt{\tau}$$

Bajo estos supuestos, el precio de una opción de compra tiene una forma cerrada dada por:

$$C_t(K) = e^{-r\tau} \left(p \left[e^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2} \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) \right] + (1-p) \left[e^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2} \Phi(d_3) - K \Phi(d_4) \right] \right) \quad (2-6)$$

con

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{-\ln K + \alpha_1 + \beta_1^2}{\beta_1} & d_2 &= d_1 - \beta_1 \\ d_3 &= \frac{-\ln K + \alpha_2 + \beta_2^2}{\beta_2} & d_4 &= d_3 - \beta_2 \end{aligned}$$

Este modelo es la suma ponderada de dos precios calculados con Black Scholes, y usa la función de densidad acumulada (*cdf*) de una variable normal estándar. Más aún, la forma funcional para S_T debe ser más flexible que el modelo lognormal de Black-Scholes. Se puede suponer que la función de densidad neutral al riesgo puede ser bimodal, comportamiento que sólo puede observarse en la mixtura finita de distribuciones y no con una simple distribución lognormal. En particular, la forma funcional para $f(S_T)$ debe capturar el comportamiento debido a la sonrisa de la volatilidad, esto debido al efecto de la asimetría y curtosis que el modelo Black-Scholes no considera. Según Bahra (1997) la mixtura de dos lognormales puede capturar múltiples formas para la distribución, ya sea unimodal o bimodal; esto ocurre cuando los inversionistas ponen un alto peso en un movimiento extremo del subyacente, pero no están seguros de su dirección.

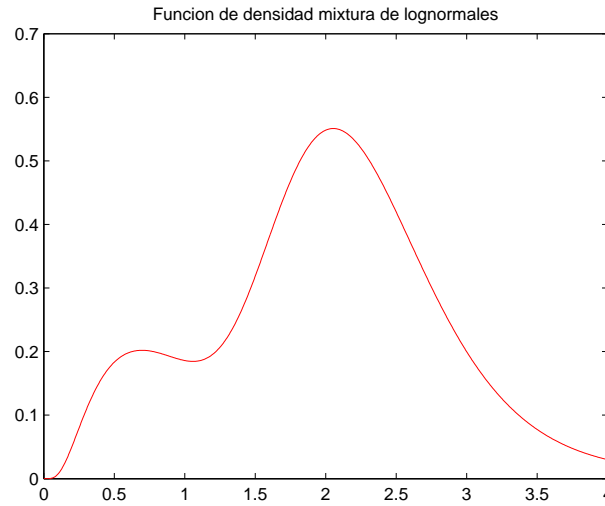


Figura 2-6: Ejemplo distribución mixtura de lognormales bimodal con parámetros $p = 0,65$
 $\mu_1 = 0,8$ $\sigma_1 = 0,25$ $\mu_2 = 0,2$ $\sigma_2 = 0,75$

La fórmula (2-6) es una combinación convexa de dos precios de tipo Black Scholes. Si $p = 0$ o $p = 1$ obtenemos el modelo Black Scholes en cada caso, sólo si $\mu_1 = r$ o $\mu_2 = r$; respectivamente. Para que se pueda obtener Black Scholes se debe suponer que las medias de la distribuciones sean igual a la tasa libre de riesgo, supuesto que ya fue considerado en Black-Scholes.

2.5. Modelo con distribución Weibull

Corrado & Su (1996) examinaron el modelo Jarrow-Rudd para opciones sobre el índice S&P 500. Ellos estimaron desviación estándar, asimetría y curtosis de la distribución del subyacente. El resultado empírico muestra que siempre se obtiene un coeficiente de asimetría negativo. De esta manera, la asimetría negativa hace que el modelo de Black Scholes subvalore opciones en el dinero (*ITM*), y sobrevalore opciones fuera del dinero (*OTM*). El coeficiente de asimetría viene dado por el tercer momento de la distribución, con lo que en el modelo Black Scholes, la distribución lognormal se tiene siempre que el tercer momento central es positivo. Con esta motivación Savickas (2002) utiliza la distribución Weibull, ampliamente usada en modelación del tiempo de falla de componentes eléctricos. A diferencia de la distribución lognormal, la distribución de Weibull tiene el tercer momento central negativo para casi todos los parámetros de la distribución. Ninguna combinación de parámetros de la distribución lognormal hace que la asimetría sea negativa, contraria a la distribución Weibull. Se dice que una variable aleatoria continua (Rinne 2009) tiene una distribución de Weibull de parámetros

c y b si su función de densidad de probabilidad (*pdf*) es

$$f(x) = \frac{c}{b} \left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^c\right\} \quad x \geq 0 \quad (2-7)$$

En las siguientes gráficas, se presenta la función de densidad de Weibull para ciertos parámetros:

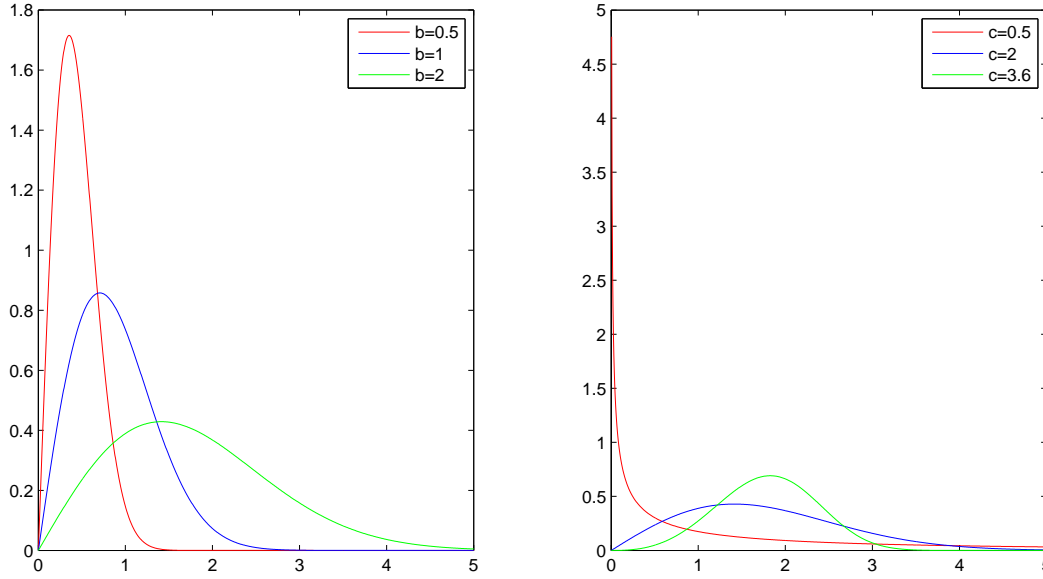


Figura 2-7: Gráfico de la densidad de Weibull para diferentes valores de los parámetros de escala y forma.

En este caso escribimos que $X \sim Wei(b, c)$, donde $c > 0$ es el parámetro de forma y $b > 0$ es el parámetro de escala. Su media y su varianza están dadas por

$$E(X) = b\Gamma\left(\frac{1}{c} + 1\right) \quad (2-8)$$

$$Var(X) = b^2 \left[\Gamma\left(\frac{2}{c} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{c} + 1\right) \right] \quad (2-9)$$

donde $\Gamma(\cdot)$ denota la función gamma definida por

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \quad (2-10)$$

La fórmula de valoración para una opción de compra en el instante t con precio de ejercicio K y vencimiento en T es:

$$C_t(K) = S_0[1 - F_{2(1+1/c)}(2\omega)] - Ke^{-r\tau}e^{-\omega} \quad (2-11)$$

donde $F_d(a)$ es la función de acumulación en el punto a de un variable aleatoria con distribución χ^2 con d grados de libertad y:

$$\omega = \left[\frac{\Gamma(p)}{S_0} K e^{-r\tau} \right]^c$$

$$c = 1/(p - 1)$$

$$b = \frac{S_0}{\Gamma(p)}$$

La derivación de la fórmula (2-11) se realiza mediante medidas equivalentes de martingala o equivalentemente por valoración neutral al riesgo en tiempo discreto. El valor de p se obtiene mediante una rutina numérica descrita en el mismo artículo. A partir de la relación

$$\frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p - 1)} = \frac{1}{1 + \text{Var}(S_T e^{-r\tau} | \Omega_0) / S_0^2}$$

donde el valor de p es encontrado por el método de la bisección. Sea $X_t = S_t e^{-r\tau}$ donde S_t es el precio del subyacente en el instante t . El valor de $\text{Var}(X_T | \Omega_0)$ se estima mediante las siguientes relaciones:

$$E(\ln X) = \ln S_0 + \tau[E(\ln[S_{t+1}/S_t]) - r]$$

$$\text{Var}(\ln X) = \tau \text{Var}(\ln[S_{t+1}/S_t])$$

donde $X \sim Wei$, puesto que S se distribuye Weibull y al multiplicar esta variable por una constante no cambia su distribución. Observe que el cálculo del valor esperado no se usa directamente en la fórmula, pero se requiere para calcular la varianza. Esto es análogo al caso Black-Scholes donde no se requiere el computo del valor esperado pero se requiere para el cálculo de la varianza que si aparece en la fórmula. X_t es el proceso neutralizado al riesgo, mientras S_t no tiene este ajuste, pero en los cálculos esto no es importante puesto que tienen la misma varianza.

2.6. Modelo de Jarrow y Rudd

Jarrow & Rudd (1982) propusieron un modelo para extender la fórmula de Black Scholes para que se incluyera la asimetría y la curtosis que se observa en la serie de precios del activo subyacente. Usando la expansión generalizada de Edgeworth se puede aproximar cualquier distribución con sus cuatro primeros momentos. Suponga que una opción de compra C está valorada con una distribución F , de la cual sólo se conocen sus primeros momentos, y se desea aproximar mediante una distribución conocida A . Entonces el precio de la opción de compra es:

$$C(F) = C(A) - e^{r\tau} \frac{\kappa_3(F) - \kappa_3(A)}{3!} \frac{da(K)}{dS_T} + e^{r\tau} \frac{\kappa_4(F) - \kappa_4(A)}{4!} \frac{d^2a(K)}{dS_T^2} + \varepsilon(K) \quad (2-12)$$

El término $C(F)$ representa el precio de una opción de compra basado en la distribución F , $C(A)$ es el precio de la opción bajo una distribución A , seguido por los términos de ajuste basados en los cumulantes $\kappa_j(F)$ y $\kappa_j(A)$, de las distribuciones F y A respectivamente. La relación entre los cumulantes de la distribución y sus momentos son:

$$\kappa_2(F) = \mu_2(F) \quad \kappa_3(F) = \mu_3(F) \quad \kappa_4(F) = \mu_4(F) - 3\mu_2^2(F)$$

donde μ_i representan los momentos centrales. $a(S_T)$ representa la función de densidad de S_T en el vencimiento de la opción. El residuo $\varepsilon(K)$ de la expansión de Edgeworth está en términos de los cumulantes y los momentos de orden superior. Cuando la distribución A es lognormal, el término $C(A)$ es el precio de la opción bajo el entorno Black Scholes. El método iguala los dos cumulantes de A y de F , $\kappa_2(F) = \kappa_2(A)$, y al despreciar el término $\varepsilon(K)$, la fórmula puede escribirse:

$$C(F) = C(A) + \lambda_1 Q_3 + \lambda_2 Q_4 \quad (2-13)$$

donde los coeficientes están definidos como:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \gamma_1(F) - \gamma_1(A) \\ Q_3 &= -(S_0^{r\tau})^3 (e^{\sigma^2\tau} - 1)^{3/2} \frac{e^{-r\tau}}{3!} \frac{da(K)}{dS_T} \\ \lambda_2 &= \gamma_2(F) - \gamma_2(A) \\ Q_4 &= -(S_0^{-r\tau})^4 (e^{\sigma^2\tau} - 1)^2 \frac{e^{-r\tau}}{4!} \frac{d^2a(K)}{dS_T^2} \end{aligned}$$

$\gamma_1(F)$ y $\gamma_1(A)$ son los coeficientes de asimetría y $\gamma_2(F)$ y $\gamma_2(A)$ son los excesos de curtosis de las distribuciones F y A respectivamente. Estos coeficientes están definidos en términos de sus cumulantes

$$\gamma_1(F) = \frac{\kappa_3(F)}{\kappa_2^{3/2}(F)} \quad \gamma_2(F) = \frac{\kappa_4(F)}{\kappa_2^2(F)}$$

Q_3 y Q_4 representan la asimetría y curtosis de la distribución lognormal.

2.7. Modelo de Corrado y Su

Corrado & Su (1996) ajusta el precio de la opción de tipo Black Scholes incluyendo la asimetría y la curtosis de los retornos del activo subyacente directamente y donde los parámetros son invariantes en el tiempo para el retorno pero no para los niveles de precios. Usando una expansión de Gram-Charlier para la función de densidad de probabilidad para una normal estándar, se trunca hasta el cuarto término para incluir los efectos de la asimetría y curtosis de los retornos del activo. Esta aproximación es similar a la expansión en serie de Taylor para funciones analíticas. El precio de una opción también es un ajuste del precio Black

Scholes más unos términos para la asimetría y curtosis de una distribución no normal. Una expansión de Gram Charlier para una función de densidad $f(x)$ está definida como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x) \phi(x)$$

donde $\phi(x)$ es la función de densidad normal, $H_n(x)$ son los polinomios ortogonales de Hermite obtenidos de las derivadas de orden superior de $\phi(x)$, y los coeficientes c_n son determinados por los momentos de la distribución $F(x)$. La serie es truncada hasta el cuarto término, que incluye los efectos sobre el precio que se quieren tener en cuenta. Después de estandarizar a media cero y varianza uno, la serie truncada para la densidad de la variable es:

$$g(z) = \phi(z) \left[1 + \frac{\mu_3}{3!}(z^3 - 3z) + \frac{\mu_4 - 3}{4!}(z^4 - 6z^2 + 3) \right]$$

donde

$$z = \frac{\ln(S_t/S_0) - (r - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Para la función de densidad $g(z)$ tenemos que $E(z) = 0$, $E(z^2) = 1$, $E(z^3) = \mu_3$, $E(z^4) = \mu_4$. Con esta distribución se calcula el precio de una opción de compra europea:

$$C_{CS}(K) = C_{BS} + \mu_3 Q_3 + (\mu_4 - 3) Q_4 \quad (2-14)$$

donde

$$Q_3 = \frac{1}{3!} S_0 \sigma \sqrt{\tau} ((2\sigma\sqrt{\tau} - d_1) \phi(d_1) - \sigma^2 t \Phi(d_1))$$

$$Q_4 = \frac{1}{4!} S_0 \sigma \sqrt{\tau} ((d_1^2 - 1 - 3\sigma\sqrt{\tau} d_2) \phi(d_1) + \sigma^3 \tau^{3/2} \Phi(d_1))$$

d_1 y d_2 tienen el mismo valor que en (2-3) con el que se calcula C_{BS} .

3 Valoración de opciones mediante uso de distribuciones no gaussianas

El uso de mixturas de distribuciones lognormales fue implementado por Bahra (1997); así a partir de los precios observados en el mercado de las opciones europeas, se puede determinar mediante métodos numéricos los parámetros de la función de densidad neutral al riesgo del activo subyacente. La mixtura de distribuciones permite que la función de densidad sea mucho más flexible que con una sola distribución. Al considerar una mixtura, se puede incluir los efectos de la asimetría y la curtosis. Incluso se puede presentar que la función sea bimodal. A diferencia del modelo de Bahra, se desea incluir dos nuevos parámetros a la distribución, uno de localización A y uno de escala B (Jiménez et al. 2014). La motivación de la introducción de estos dos parámetros se debe a que Bahra no los considera, mientras que en el modelo Black Scholes podemos ver que se definen estos parámetros implícitamente. $x \sim \text{LogN}(\mu, \sigma)$ si y sólo si $u \equiv \frac{\ln(x) - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$, es decir que el parámetro de localización corresponde a μ y el de escala es σ . Una versión simplificada de la fórmula Black Scholes puede ser descrito como

$$S_\tau \sim S_0 \times \text{LogN}(r\tau - \frac{1}{2}\sigma^2\tau, \sigma\sqrt{\tau}) \quad (3-1)$$

Indicando que σ incrementa con el tiempo a velocidad $\tau^{1/2}$.

3.1. Mixtura de distribuciones lognormales

Las demostraciones de estas fórmulas pueden encontrarse en el apéndice. Se introduce la siguiente transformación de la variable aleatoria S_t : con parámetros de localización A y escala B . Suponga que Y tiene una distribución mixtura de normales, entonces definimos una nueva variable:

$$\ln S_t = A + BY_t \quad \text{con} \quad Y \sim \text{MixN}(\theta) \quad (3-2)$$

con $\theta = (p, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2)$ Al aplicar exponencial en ambos lados de la ecuación:

$$S = e^A e^{BY}$$

así S tiene una distribución mixtura de lognormales. Su valor esperado es:

$$E[S] = e^A E[e^{BY}]$$

$$E[S] = e^A M_Y(B)$$

donde $M_Y(\cdot)$ es la función generadora de momentos de la variable aleatoria Y dada por

$$M_Y(t) = p \exp\left\{\mu_1 t + \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}\right\} + (1-p) \exp\left\{\mu_2 t + \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}\right\} \quad (3-3)$$

Note que la adición de estos dos parámetros no cambia la forma de la distribución, ya que se consideran constantes durante la vigencia de la opción. Mediante la fórmula de valoración (2-4), y considerando la RND dada por la transformación (3-2), y $(S-K)_+ = \max\{S-K, 0\}$ se tiene lo siguiente:

$$e^{r\tau} C_t(K) = E[(S_T - K)_+] = E[(e^A e^{BY} - k)_+]$$

donde $Y = \frac{\ln S_T - A}{B}$ y $k = \frac{\ln K - A}{B}$

Considerando que $g_i(y)$ corresponde a la pdf de la distribución lognormal de parámetros (μ_i, σ_i) , se tiene la siguiente fórmula de valoración:

$$C_t(K) = \sum_{i=1}^2 p_i \left[\frac{S_0}{W_i} \Phi(d_1^{(i)}) - K e^{-r\tau} \Phi(d_2^{(i)}) \right] \quad (3-4)$$

con los siguientes parámetros:

$$d_1^{(i)} = \frac{\ln(S_0/KW_i) + (r + 1/2\sigma_i^2)\tau}{\sigma_i\sqrt{\tau}}$$

$$d_2^{(i)} = d_1^{(i)} - \sigma_i\sqrt{\tau}$$

$$W_1 = p + (1-p)e^{(\mu_2 - \mu_1)\sqrt{\tau} + 1/2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\tau}$$

$$W_2 = pe^{(\mu_1 - \mu_2)\sqrt{\tau} + 1/2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)\tau} + (1-p)$$

A diferencia de la fórmula de Bahra (2-6) se observa que en cada componente de la mixtura, hay dependencia de cada término dada por la expresión de W_i que depende de los cinco parámetros de la distribución. Se puede considerar alternativamente al modelo de Bahra si el parámetro de localización $A = 0$ y el parámetro de escala $B = 1$. Si se considera que el peso $p = 0$ o $p = 1$, se obtiene la misma fórmula de Black Scholes sin tener la consideración que la media del retorno μ es igual a la tasa libre de riesgo r , sino que en ésta nueva fórmula no se debe tener en cuenta esto a diferencia del modelo de Bahra. De igual manera, esta nueva fórmula tiene más similitud con el modelo Black Scholes, debido a que en los términos que se evalúan dentro de la función de acumulación de la normal estándar son semejantes a d_1 y d_2 menos en los valores de W_i . En el siguiente capítulo se comparará numéricamente estos

modelos. Se obtiene, de manera analítica la estimación de los parámetros de localización y escala:

$$\begin{aligned} A &= \ln(S_0) + r\tau - \ln(M_y(B)) \\ B &= \sqrt{\tau} \end{aligned} \quad (3-5)$$

Así, el supuesto inicial acerca de los parámetros, coincide con lo propuesto. Esta fórmula tiene solo cinco parámetros a determinar $p, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$. En las siguientes fórmulas, no se tiene una forma analítica de estimar los parámetros de la distribución, sino tiene que hacerse mediante métodos numéricos.

3.2. Distribución Weibull propuesta

Se desea introducir la misma transformación para la mixtura de normales. Para poder modelar una variable aleatoria, se introducen dos parámetros adicionales A (localización) y B (escala) (Jiménez et al. 2014) y se propone la siguiente transformación

$$S = A + BY \quad \text{con} \quad Y \sim Wei(c, b) \quad (3-6)$$

Para la nueva variable aleatoria S tenemos que su valor esperado es:

$$\begin{aligned} E(S) &= A + BE(Y) \\ &= S_0 e^{r\tau} \end{aligned} \quad (3-7)$$

Bajo estos supuestos, el precio de una opción de compra europea con vencimiento τ , precio de ejercicio K está dada por

$$C_t(K) = e^{-r\tau} [Bb[\Gamma(1 + 1/c) - \Gamma_\omega(1 + 1/c)] - (K - A)e^{-\omega}] \quad (3-8)$$

donde

$$\begin{aligned} B &= \sigma\sqrt{\tau} \\ \omega &= \left(\frac{K - A}{Bb} \right)^c \end{aligned}$$

$\Gamma_d(\cdot)$ representa la función gamma incompleta definida como:

$$\Gamma_d(a) = \int_0^d t^{a-1} e^{-t} dt$$

La similitud con la fórmula de Savickas se puede observar cuando $A = 0$ y $B = 1$, pero en Savickas (2002) la estimación de parámetros la realiza mediante un esquema numérico utilizando la varianza histórica. Cuando se introducen los parámetros A y B , se tiene una normalización del precio de ejercicio similar a cuando se desea estandarizar una variable con distribución normal para llevarla a una estándar. La estimación de parámetro se discutirá en el siguiente capítulo.

3.3. Mixtura de Weibull

Si se considera que la distribución neutral al riesgo es una mixtura de Weibull, y considerando el cambio de variable dado por la transformación (3-6), se obtiene un modelo alternativo de valoración que presenta la misma flexibilidad que la mixtura de normales. La fórmula de valoración de opciones call europeas es:

$$C_t^{mix}(k) = e^{-r\tau} \sum_{i=1}^2 p_i [b_i B(\Gamma(1 + 1/c_i) - \Gamma_{\omega_i}(1 + 1/c_i)) - (K - A)e^{-\omega_i}] \quad (3-9)$$

donde $\omega_i = \left(\frac{K-A}{b_i B}\right)^{c_i}$, $A = S_0 e^{r\tau} - BE(Y)$ $B = \sigma\sqrt{\tau}$ Obsérvese que si $p = 0$ o $p = 1$, la fórmula queda reducida al modelo de Savickas. La forma flexible de la mixtura también permite en este modelo la posibilidad que la RND sea bimodal. Las demostraciones de estas fórmulas pueden encontrarse en el apéndice.

3.4. Griegas

Las griegas de las opciones son expresiones útiles para medir la sensibilidad del precio de la opción sobre cambio en algunas de sus variables. Los usos prácticos de las griegas son para la cobertura de riesgo debido a movimientos inesperados en las variables financieras que están involucradas en la valoración de las opciones. Se definen las griegas más importantes para cada modelo:

1. **Delta** Mide el cambio en el precio de la opción cuando el precio del subyacente varia. Se define como la derivada parcial de C con respecto a S . $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$
2. **Gamma** Mide el cambio en la delta de la opción cuando el precio del subyacente varia. Se define como la derivada parcial de Δ con respecto a S o, la segunda derivada del precio con respecto a S . $\gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$
3. **Vega** Mide el cambio en el precio de la opción cuando la volatilidad del subyacente varia. Se define como la derivada parcial de C con respecto a σ . $\nu = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$
4. **Theta** Mide el cambio en el precio de la opción cuando la fecha de madurez varia. Se define como la derivada parcial de C con respecto a t . $\theta = \frac{\partial C}{\partial t}$
5. **Rho** Mide el cambio en el precio de la opción cuando la tasa de interés varia. Se define como la derivada parcial de C con respecto a r . $\rho = \frac{\partial C}{\partial r}$

3.4.1. Griegas en Black Scholes

Delta

$$\Delta = e^{-r\tau}\Phi(d_1) \quad (3-10)$$

Gamma

$$\gamma = \frac{e^{-r\tau}\varphi(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}} \quad (3-11)$$

Vega

$$\nu = Se^{-r\tau}\varphi(d_1)\sqrt{\tau} \quad (3-12)$$

Theta

$$\theta = rSe^{-r\tau}\Phi(d_1) - rKe^{-r\tau}\Phi(d_2) - \frac{Ke^{-r\tau}\varphi(d_2)\sigma}{2\sqrt{\tau}} \quad (3-13)$$

Rho

$$\rho = Se^{-r\tau}\varphi(d_1)\sqrt{\tau} \quad (3-14)$$

3.4.2. Griegas de la fórmula mixtura de lognormales

La deducción de estas fórmulas se encuentran en el apéndice. Primero se presentan las expresiones para las griegas anteriormente mencionadas y en el capítulo siguiente se analizan experimentos numéricos.

Delta

$$\Delta = \sum_{i=1}^2 \frac{p_i}{W_i} \Phi(d_1^{(i)}) \quad (3-15)$$

Gamma

$$\gamma = \frac{1}{S\sqrt{\tau}} \sum_{i=1}^2 p_i \frac{\varphi(d_1^{(i)})}{W_i\sigma_i} \quad (3-16)$$

Vega

$$\nu = S\sqrt{\tau} \sum_{i=1}^2 \frac{p_i}{W_i} \varphi(d_1^{(i)}) \quad (3-17)$$

Theta

$$\theta = \sum_{i=1}^2 p_i \left(-\frac{S}{W_i^2} \Phi(d_1^{(i)}) (p - W_i) [(\mu_2 - \mu_1)\sqrt{\tau} + 1/2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\tau] \right. \\ \left. Kre^{-r\tau}\Phi(d_2^{(i)}) - \varphi(d_1^{(i)}) \frac{S}{W_i} \sigma_i \sqrt{\tau} \right)$$

Rho

$$\rho = K\tau e^{-r\tau} \sum_{i=1}^2 p_i \Phi(d_2^{(i)}) \quad (3-18)$$

3.4.3. Griegas de la fórmula de Weibull propuesta

Delta

$$\Delta = e^{-\omega} = 1 - F(K) \quad (3-19)$$

Donde $F(\cdot)$ es la función de acumulación para una variable con distribución Weibull.

Gamma

$$\gamma = f(K)e^{r\tau} \quad (3-20)$$

donde $f(\cdot)$ es la función de densidad de probabilidad para la distribución Weibull.

Vega

$$\nu = \sqrt{\tau}e^{-r\tau}b [\Gamma(1 + 1/c)(1 - e^{-\omega})\Gamma_{\omega}(1 + 1/c)] \quad (3-21)$$

Theta

$$\theta = rC - e^{-r\tau} [\sigma\sqrt{\tau}(b(\Gamma(1 + 1/c)(1 - e^{-\omega}) - \Gamma_{\omega}(1 + 1/c)))] - rSe^{-\omega} \quad (3-22)$$

Rho

$$\rho = \tau [S\Delta - C] \quad (3-23)$$

3.4.4. Griegas de la fórmula de mixtura de Weibull

Delta

$$\Delta = \sum_{i=1}^2 p_i(1 - F_i(K)) \quad (3-24)$$

Donde $F_i(\cdot)$ es la función de acumulación para una variable con distribución Weibull con $i = 1, 2$.

Gamma

$$\gamma = e^{r\tau} \sum_{i=1}^2 p_i f_i(K) \quad (3-25)$$

donde $f_i(\cdot)$ es la función de densidad de probabilidad para la distribución Weibull con $i = 1, 2$.

Vega

$$\nu = \sqrt{\tau}e^{-r\tau} \sum_{i=1}^2 p_i [b_i (\Gamma(1 + 1/c_i) - \Gamma_{\omega_i}(1 + 1/c_i)) + E(Y)e^{-\omega_i}] \quad (3-26)$$

Theta

$$\begin{aligned} \theta = rC + e^{-r\tau} \sum_{i=1}^2 p_i [-\sigma\sqrt{\tau}b_i (\Gamma(1 + 1/c_i) - \Gamma_{\omega_i}(1 + 1/c_i)) \\ + b_i (\Gamma(1 + 1/c_i) - \Gamma_{\omega_i}(1 + 1/c_i))] \end{aligned}$$

Rho

$$\rho = \tau (S\Delta - C) \quad (3-27)$$

4 Modelación y estimación numérica

Las fórmulas de valoración de derivados europeos presentadas aquí, también son útiles para determinar los parámetros de la distribución neutral al riesgo dada una vez la forma funcional de esta. Así, mediante métodos estadísticos, se puede determinar los parámetros a usar en cada una de las fórmulas. También, dada la distribución neutral al riesgo y los precios observados en el mercado, se puede determinar los parámetros de las fórmulas que minimicen el error cuadrático. Debido a la forma de la variable aleatoria dada por (3-6) y por (3-2) se utiliza el método de los momentos centrales, dada una muestra de los precios históricos del activo subyacente S_t .

4.1. Estimación de parámetros.

Para modelar el precio de las opciones europeas se consideran los datos actuales del mercado. Se estima el valor de los parámetros de dos maneras, una es por minimización de errores cuadráticos en la fórmula, o calculando estimadores para utilizarlos directamente en la función de distribución neutral al riesgo. Los modelos propuestos son probados con datos de los precios del índice S&P 500.

4.1.1. Minimización de errores cuadráticos

Está técnica fue usada en Bahra (1997) para estimar los parámetros de su fórmula de valoración con mixtura de normales. Se considera una función con los parámetros de la fórmula de valoración y los precios observados en el mercado. Se usa un método de optimización en varias variables, ya puede ser el método de Newton o gradiente conjugado. Se supone que la tasa de interés r es conocida y así se puede reducir la dimensionalidad del problema. Dado que tanto las opciones call como las put tienen la misma distribución para el activo subyacente, estas se incluyen en la función objetivo para mejorar la estimación de los parámetros. También la media de la distribución neutral al riesgo debe ser igualada con el precio del subyacente al vencimiento de la opción (Bahra 1997). De esta manera se trata el activo subyacente como una opción con precio strike cero que incluye el precio futuro como información adicional para el problema de minimización. Entonces este problema para la fórmula (3-8) y considerando su media se describe a continuación. Sea \tilde{C}_i y \tilde{P}_i los precios

observados call y put respectivamente.

$$\min_{A,B,b,c} \sum_{i=1}^n (C_t(K_i) - \tilde{C}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (P_t(K_i) - \tilde{P}_i)^2 + (A + Bb\Gamma(1 + 1/c) - S_0 e^{r\tau}) \quad (4-1)$$

para $-\infty < A, B < \infty$ y $b, c > 0$. Hacemos las mismas consideraciones para la fórmula de valoración con mixtura de Weibull, que sería un problema con cinco parámetros $0 < p < 1$, $c_1, c_2, b_1, b_2 > 0$.

$$\begin{aligned} \min_{p,c_1,c_2,b_1,b_2} \sum_{i=1}^n (C_t(K_i) - \tilde{C}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (P_t(K_i) - \tilde{P}_i)^2 \\ + (pb_1\Gamma(1 + 1/c_1) + (1-p)b_2\Gamma(1 - 1/c_2) - S_0 e^{r\tau}) \end{aligned} \quad (4-2)$$

Para la mixtura de lognormales propuesta, se obtiene el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min_{p,\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2} \sum_{i=1}^n (C_t(K_i) - \tilde{C}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (P_t(K_i) - \tilde{P}_i)^2 \\ + (pe^{\mu_1+\sigma_1/2} + (1-p)e^{\mu_2+\sigma_2/2} - S_0 e^{r\tau}) \end{aligned} \quad (4-3)$$

con la restricciones $0 < p < 1$, $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2 > 0$.

4.1.2. Estimación de parámetros por método de momentos

Para la fórmula de Weibull modificada y la mixtura de Weibull, la estimación de parámetros se realiza con el método de los momentos centrales. Dada la transformación de la variable aleatoria Y dada por la ecuación (3-6), se tienen que estimar cuatro parámetros A, B, b, c y siete para el caso de la mixtura $A, B, \alpha, b_1, b_2, c_1, c_2$, de los cuales se tienen que plantear el mismo número de ecuaciones. Dados los momentos centrales muestrales, se igualan con los momentos centrales poblacionales; sea $\mu_x = E(X)$ y $\mu_y = E(Y)$. Entonces se plantea el siguiente sistema de ecuaciones.

$$E(X) = A + BE(Y)$$

$$E(X - \mu_x)^k = B^k E(Y - \mu_y)^k$$

Al expandir el polinomio y aplicando las propiedades de linealidad del valor esperado tenemos que:

$$E(X - \mu_x)^k = B^k \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \mu_y^{k-i} \left(pb_1^i \Gamma(1 + i/c_1) + (1-p)b_2^i \Gamma(1 + i/c_2) \right) \quad (4-4)$$

para $k = 2, \dots, 7$ Para este sistema de ecuaciones no lineales, usamos el método de Newton o el método del gradiente conjugado. La idea es siempre considerar tantas ecuaciones como parámetros a determinar.

4.2. Resultados numéricos

Para poder comparar la utilidad de las fórmulas de valoración planteadas, se utilizan datos reales. Para una serie de precios del índice S&P500, con los precios diarios tomando 503 datos¹, analizamos primero la distribución empírica asociada a estos.

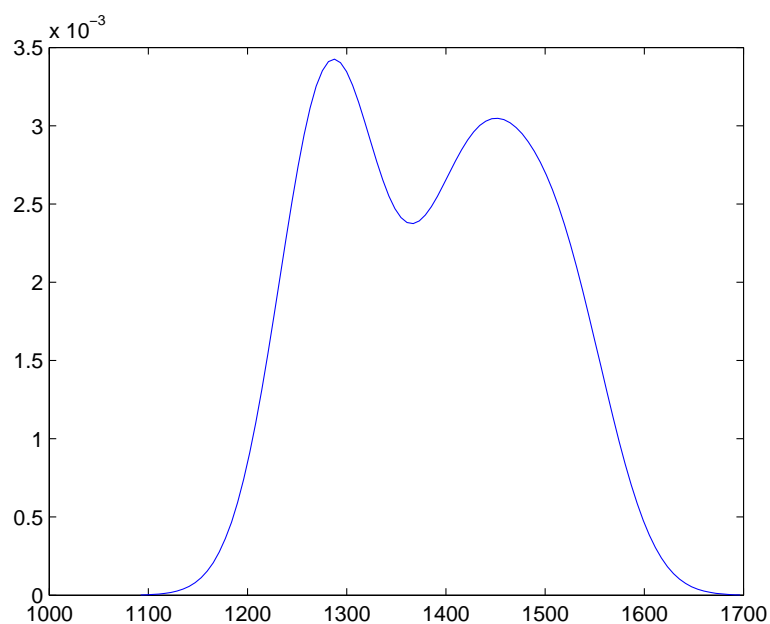


Figura 4-1: Distribución empírica de precios del S&P 500

Ahora se estimará por el método de los momentos, los parámetros de la distribución. Primero se analiza la gráfica de probabilidad normal para los datos. Como se observa los datos se alejan mucho de una distribución normal, indicando que hay colas más pesadas que para la distribución normal, por lo cual se requiere otra distribución diferente a la normal para el retorno del activo subyacente.

¹Datos tomados de <http://finance.yahoo.com/>

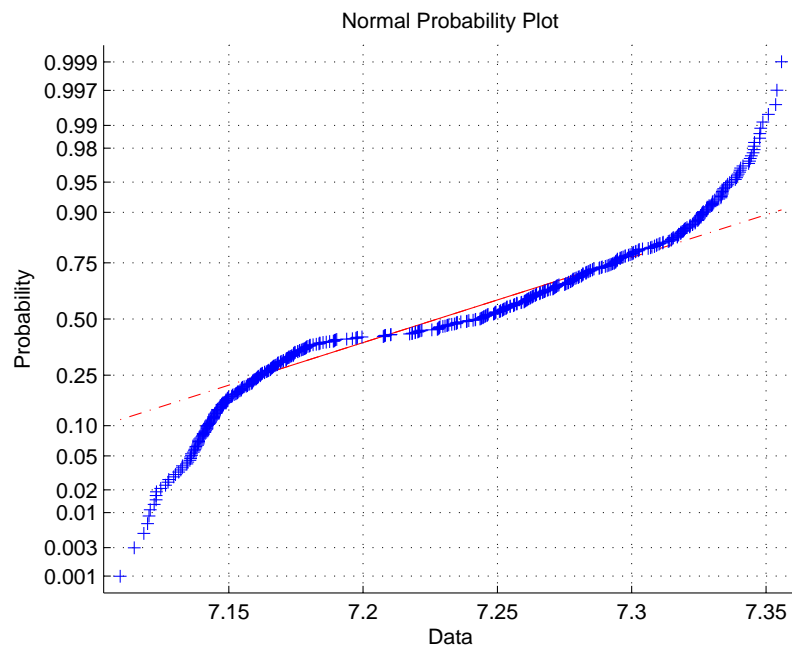


Figura 4-2: Gráfico de probabilidad versus una distribución normal

Mixtura de normales De esta manera, tenemos la siguiente aproximación:

p	μ_1	μ_2	σ_1	σ_2
0,5514	6,8786	7,0718	0,0706	0,0706

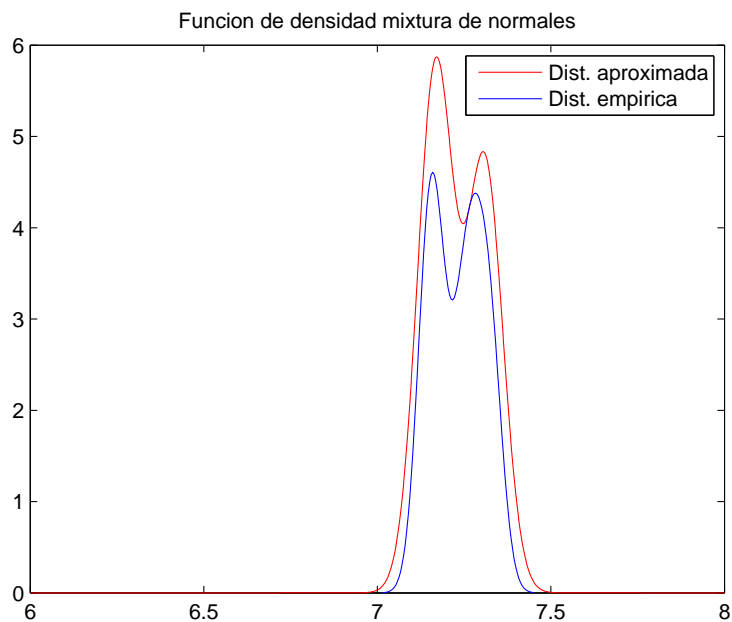


Figura 4-3: Pdf empírica y aproximada

Se observa que para estos datos, el método ajusta las varianzas iguales. También se observa que la distribución es bimodal tal como es la empírica.

Modelo de Weibull Para modelar la RND con la distribución de Weibull con parámetros de localización y escala, obtenemos los siguientes resultados.

A	B	b	c
1,1465	0,0909	2,9606	2,6360

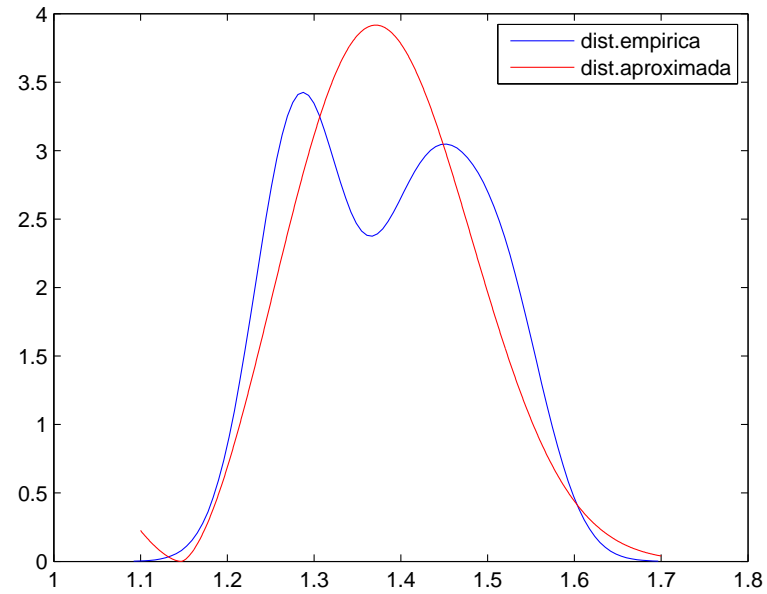


Figura 4-4: Distribución aproximada con Weibull y real para precios del S&P 500.

Como se puede ver, la distribución empírica tiene un comportamiento bimodal, por lo que una mixtura de Weibull sería más adecuada para esta serie de precios. **Mixtura de Weibull**

A	B	p	c_1	c_2	b_1	b_2
0,9566	0,3539	0,8795	3,8745	4,7006	1,2246	2,1585

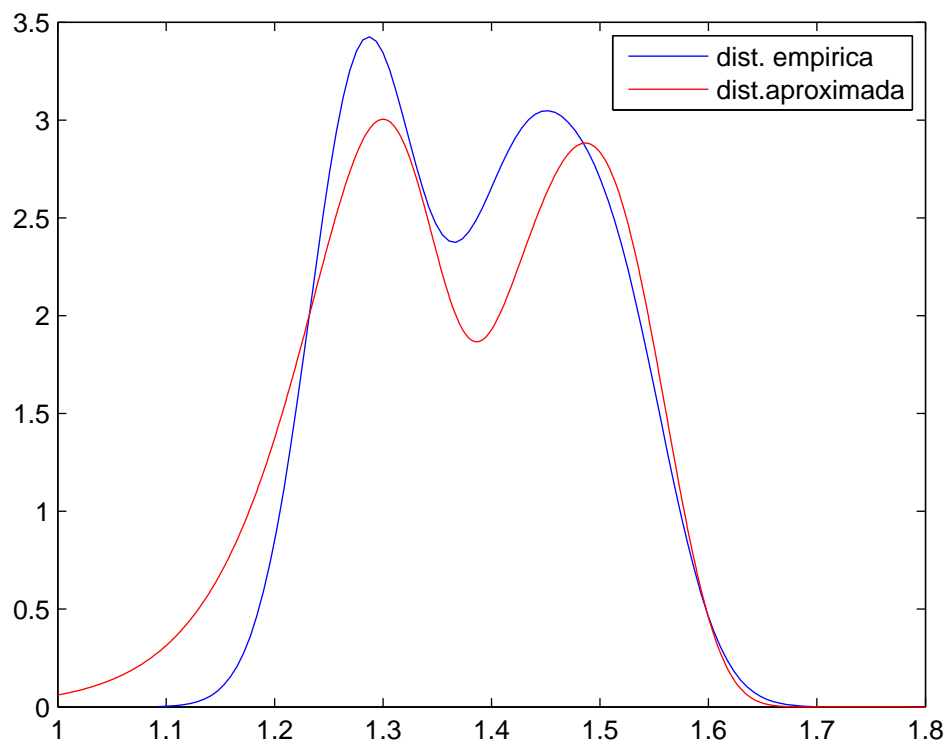


Figura 4-5: Distribución aproximada con Weibull y real para precios del S&P 500.

4.3. Valoración de opciones

Como observamos, fue más adecuada la utilización de una mixtura de normales o de Weibull, debido a la forma bimodal de la distribución del activo subyacente. En las siguientes tablas fueron calculados los precios para los modelos de Black Scholes, mixtura de Bahra, mixtura de normales propuesta, Savickas, Weibull y mixtura de Weibull. Se considero la tasa de interés libre de riesgo $r = 6\%$ precio inicial del subyacente $S_0 = 1400$, volatilidad para Black Scholes y Savickas $\sigma = 0,1297$

Strike (K)	Madurez			
	$\tau = 0,25$	$\tau = 0,5$	$\tau = 0,75$	$\tau = 1$
1200	217,9845	236,4379	254,9747	273,2350
1300	122,7235	146,2137	168,1804	188,9433
1400	47,3225	73,8093	96,9744	118,4220
1500	10,5793	29,0349	47,9057	66,5672
1600	1,2814	8,75491	20,1546	33,4801
1700	0,0855	2,0391	7,2591	15,1265

Tabla 4-1: Modelo de Black Scholes. Fuente: los autores

Strike (K)	Madurez			
	$\tau = 0,25$	$\tau = 0,5$	$\tau = 0,75$	$\tau = 1$
1200	228,1943	240.1685	255.2873	271.3371
1300	123.0441	143.9755	164.5055	184.3572
1400	44.7446	70.3304	92.9945	114,1852
1500	10,7044	28.0959	46.5604	65.1000
1600	8.6466	13.4136	23.8178	36.7348
1700	18.4028	14.7948	14.8686	24.6942

Tabla 4-2: Modelo de Corrado y Su. Fuente: los autores

Strike (K)	Madurez			
	$\tau = 0,25$	$\tau = 0,5$	$\tau = 0,75$	$\tau = 1$
1200	217.9849	236,4432	254,9927	273,2743
1300	122.7251	146,2225	168,2024	188,9847
1400	47,3229	73,8117	96,9815	118,4378
1500	10,5779	29,0288	47,8940	66,5506
1600	1,2808	8,7483	20,1366	33,4471
1700	0,0855	2,0359	7,2456	15,0956

Tabla 4-3: Modelo de Jarrow Rudd. Fuente: los autores

Strike (K)	Madurez			
	$\tau = 0,25$	$\tau = 0,5$	$\tau = 0,75$	$\tau = 1$
1200	219.3500	238.9368	258.5489	277.9501
1300	122,8479	146,2595	168,7091	190.3445
1400	40.7554	66.4494	90.0010	112.4578
1500	6.0099	19.0911	35.3055	53.2175
1600	0.6414	4.5661	11.3244	20.7194
1700	0,0389	0.9814	3.5797	7.7714

Tabla 4-4: Modelo de Bahra. Fuente: los autores

Strike (K)	Madurez			
	$\tau = 0,25$	$\tau = 0,5$	$\tau = 0,75$	$\tau = 1$
1200	219,0827	239,1920	258,9961	278,2887
1300	125,5481	150,2280	173,1020	194,7371
1400	47,0916	74,3895	98,5936	121,1987
1500	5,8629	23,453	20,1546	33,4801
1600	0,0305	3,03168	12,1433	25,1613
1700	0.0023	0,0656	1,6181	6,6267

Tabla 4-5: Modelo de Savickas. Fuente: los autores

Strike (K)	Madurez			
	$\tau = 0,25$	$\tau = 0,5$	$\tau = 0,75$	$\tau = 1$
1200	210,2709	223,3386	236,2118	248,8932
1300	107,0839	113,7389	120,2947	126,7530
1400	37,3064	39,6249	41,9088	44,1588
1500	7,7310	8,2115	8,6848	9,1510
1600	0,8309	0,8826	0,9335	0,9836
1700	0,0407	0,0432	0,0457	0,0481

Tabla 4-6: Modelo modificado de Weibull. Fuente: los autores

Strike (K)	Madurez			
	$\tau = 0,25$	$\tau = 0,5$	$\tau = 0,75$	$\tau = 1$
1200	227,3166	237,8262	248,4947	259,3243
1300	122,4712	128,1334	133,8813	139,7160
1400	53,2106	55,6707	58,1679	60,7030
1500	21,1859	22,1654	23,1597	24,1690
1600	9,6468	10,0928	10,5455	11,0051
1700	4,3859	4,5887	4,7945	5,0034

Tabla 4-7: Modelo mixturas de Weibull. Fuente: los autores

Strike (K)	Madurez			
	$\tau = 0,25$	$\tau = 0,5$	$\tau = 0,75$	$\tau = 1$
1200	217,9309	236,0775	254,2312	272,1320
1300	121.7428	144.1272	165.3098	185,5011
1400	43.1006	68.1690	90.4372	111.2700
1500	0.0134	23.5197	40.3338	57.5573
1600	0.8244	6.3669	15.4321	26.5456
1700	0,0440	1.3270	5.1350	11.2005

Tabla 4-8: Modelo Mixtura de normales propuesta. Fuente: los autores

4.4. Comparación numérica de modelos

En Corrado & Su (1996) se define el *Moneyness* como la variación entre el precio stock y el precio strike descontado a la tasa de interés libre de riesgo. Muchos autores solo consideran el moneyness como la razón entre el precio stock del subyacente y el strike, pero no es considerado una buena medida para el precio de opciones ya que se esta comparando dos valores que en realidad no están en el mismo tiempo. Por eso, mejor adoptamos el moneyness tal como Corrado & Su (1996)

$$Moneyness(\%) = \frac{Ke^{-rt} - S_0}{Ke^{-rt}} \times 100$$

Tomamos como punto de comparación el modelo de Black Scholes, que se muestra en cada una de las gráficas. En la siguiente gráfica se encuentran los precios de una opción call con precio del subyacente $X_0 = 1400$ con vencimiento $\tau = 0,0833$ (1 mes), para diferentes valores de strike variando desde 1200 hasta 1700. En el eje x se encuentra el moneyness de estas opciones. Primero se comparan los modelos de Corrado & Su, Jarrow & Rudd, los cuales ajustan los precios incluyendo la asimetría y la curtosis.

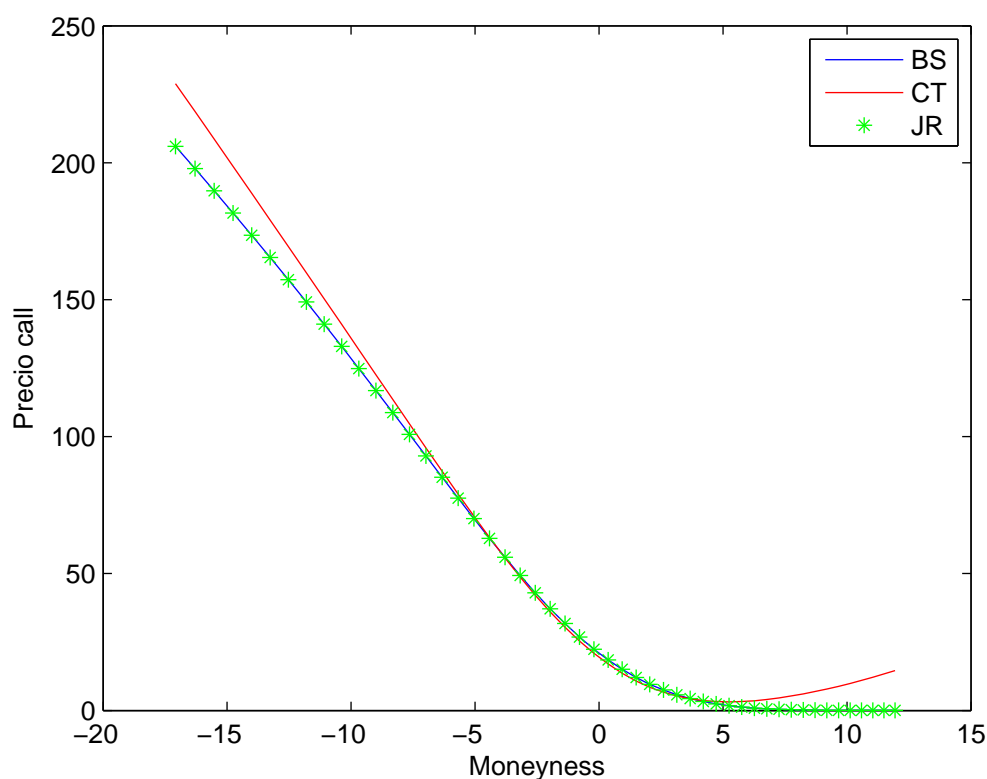


Figura 4-6: Precios de opciones call con diferentes modelos.

En este ejemplo, la diferencia entre Black Scholes y Jarrow & Rudd es muy pequeña, ya que este modelo ajusta los precios por la asimetría y curtosis de la distribución de los precios del activo subyacente. En cambio, se ve más notable el ajuste hecho por Corrado & Su que ajusta estos mismos parámetros pero de la distribución del retorno del subyacente. Para *moneyness* cercanos a cero, los tres modelos son muy similares, pero para los extremos el modelo de Corrado y Su, da como resultado que el precio de las opciones de compra debe ser mayor. Con base en esto, se desea que con los modelos propuestos, se alcance a llegar a este resultado al incluir la asimetría y la curtosis de la distribución aproximada.

Se comparan los modelos de Black Scholes, el modelo de Weibull de Savickas y los dos modelos de Weibull modificado, y mixtura de Weibull.

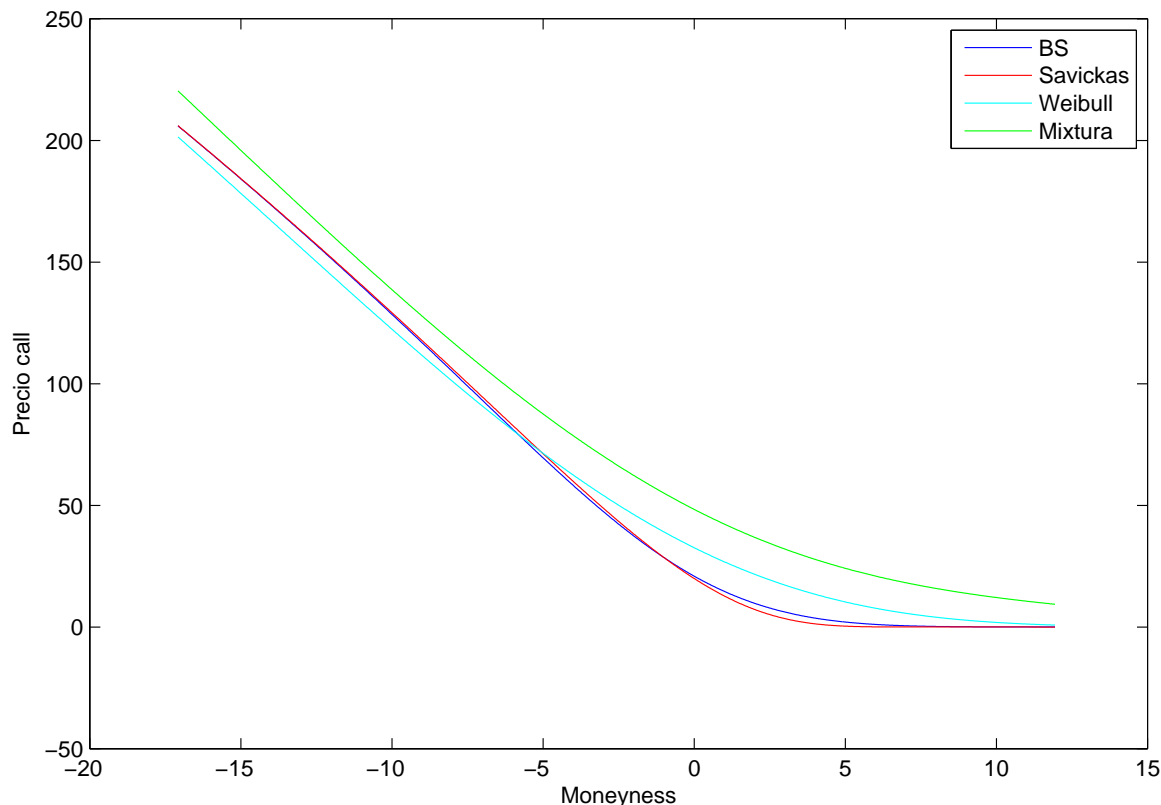


Figura 4-7: Precios de opciones call con diferentes modelos.

Como podemos observar, el modelo Black Scholes y el modelo de Savickas tienen un comportamiento muy similar para todos los tipos de opciones ya sea ITM dentro del dinero (in the money, moneyness negativo), ATM en el dinero (at the money, moneyness nulo), y OTM fuera del dinero (out the money, moneyness positivo). En cambio, con el modelo de Weibull propuesto, para opciones ITM vemos que el precio es menor que en los tres modelos y solo supera a esta valoración al aumentar el moneyness; el modelo de mixtura de Weibull siempre se encuentra por arriba de los anteriores modelos.

Ahora en la siguiente gráfica ponemos a variar el vencimiento desde un mes hasta un año, y fijamos un precio strike de $K = 1300$.

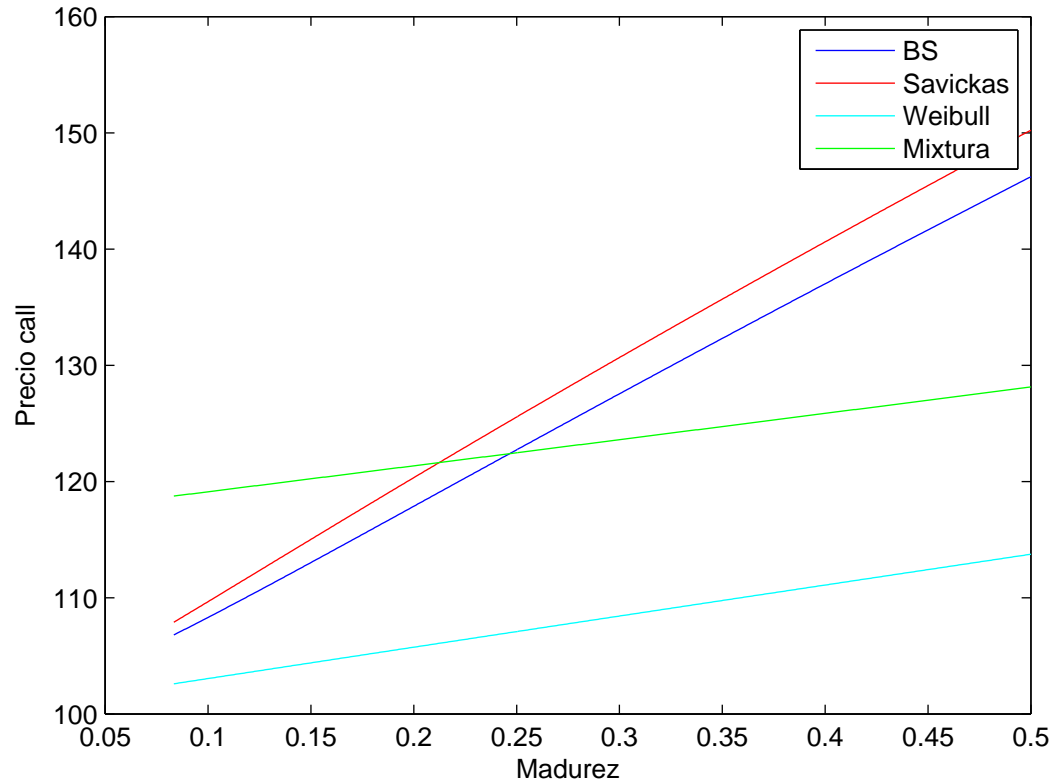


Figura 4-8: Precios de opciones call para diferentes fechas de madurez. Fuente: los autores

Se puede ver en el gráfico, el modelo propuesto de Weibull se encuentra por debajo de todos los modelos estudiados y se vuelve menos preciso para mayor plazo de vencimiento del derivado; aunque la valoración por mixtura para cortos plazos de vencimiento valora por encima de Black Scholes y Savickas, a lo largo del tiempo también se valora el derivado por debajo de lo que hace los modelos de Black Scholes y Savickas. Ahora se compara, el modelo de Bahra, con el modelo de mixturas de normales propuesto. Para los mismo datos, se presenta el siguiente gráfico.

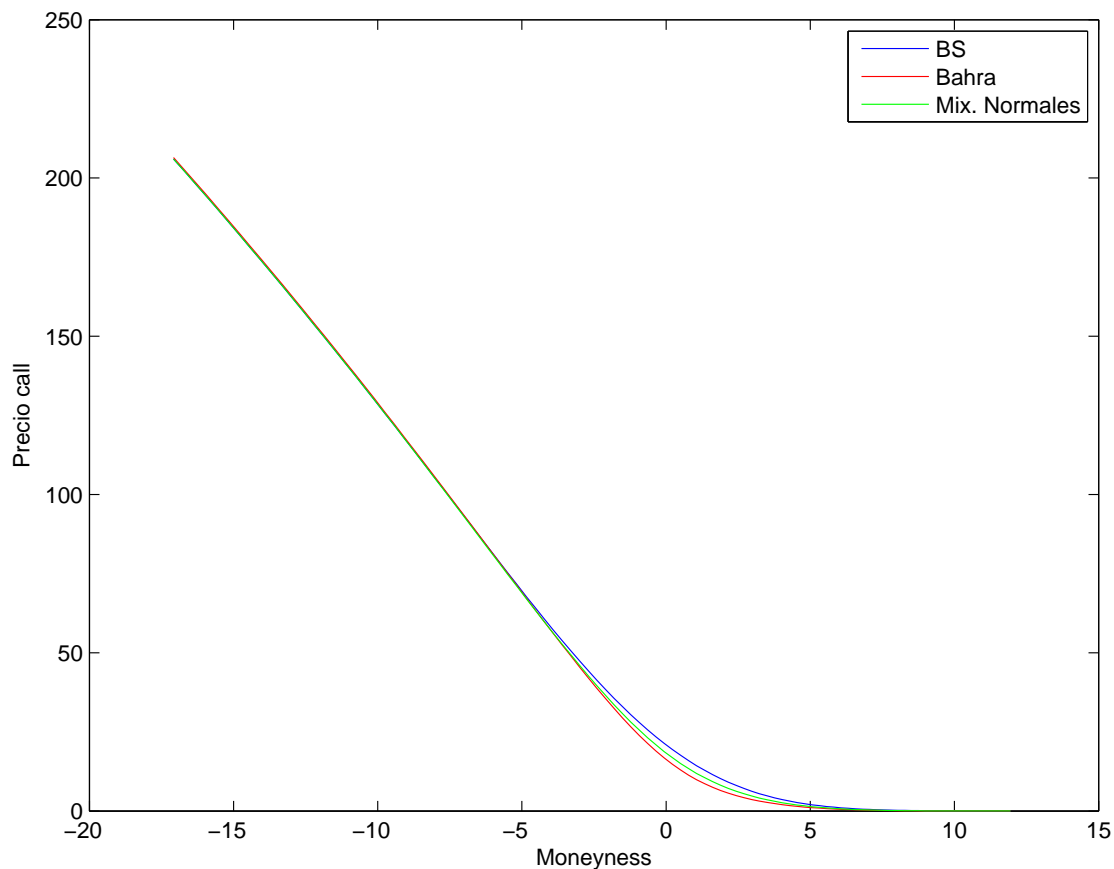


Figura 4-9: Precios de opciones call para diferentes fechas de madurez.

Los dos modelos de mixturas, para un vencimiento fijo, no muestran una variación grande con respecto al modelo Black Scholes. Solo para *moneyiness* cercanos a cero, se puede detallar una diferencia, donde Black Scholes supera a los dos modelos de mixtura. En este punto, no se puede determinar la mayor utilidad de los modelos, aunque la distribución en este ejemplo sea bimodal. Ahora se estudia para un precio de ejercicio fijo y el vencimiento variando, los tres modelos anteriores.

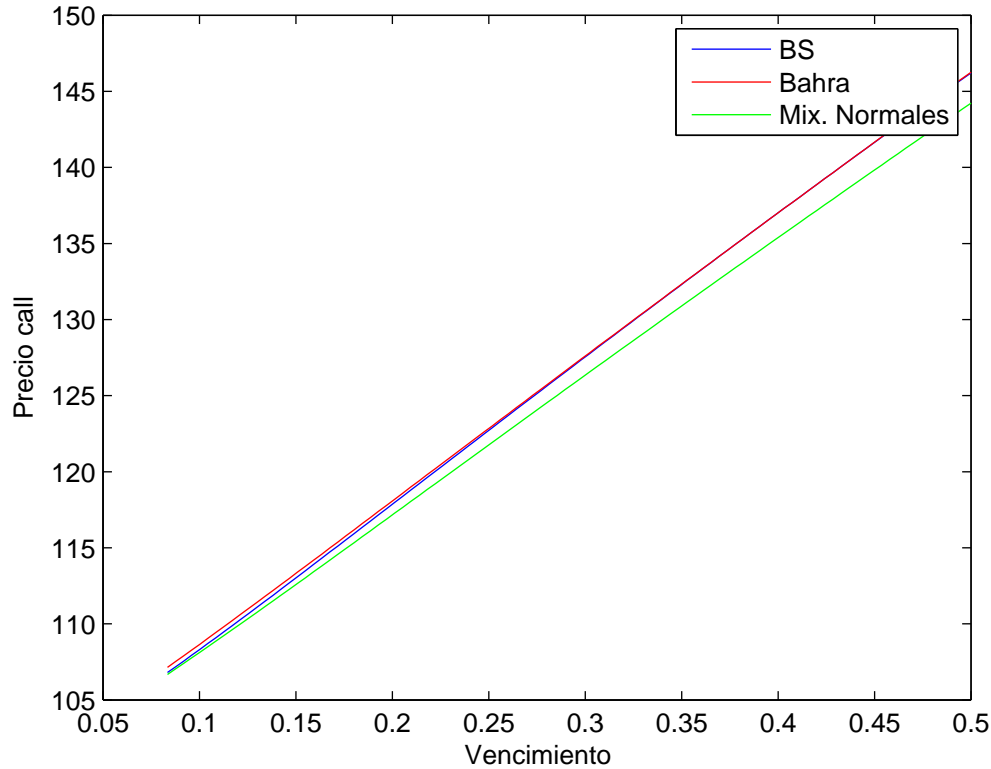


Figura 4-10: Precios de opciones call para diferentes fechas de madurez.

Tanto Black Scholes como Bahra, siguen muy cercanos a los precios, pero el modelo de mixtura propuesto, el precio es menor para vencimiento a mayor plazo. Esto se debe a que la estimación de parámetros se realiza con los datos disponibles, y se requieren cinco, mientras que Black Scholes solo requiere de la volatilidad. Al realizar la minimización de errores cuadráticos con los precios de las opciones call del índice S&P 500 con vencimiento a un mes de los precios observados del mercado², tenemos los siguientes parámetros para cada una de los modelos propuestos.

Mixtura de Bahra.

p	μ_1	μ_2	σ_1	σ_2
0,1140	2,3373	0,0104	0,2020	0,0637

Mixtura de normales propuesta.

²Datos tomados <http://www.nasdaq.com/>

p	μ_1	μ_2	σ_1	σ_2
0,8700	0,6000	0,4454	0,0584	0,1359

Weibull propuesto.

A	B	b	c
4,7131	4,7780	49,7913	396,5333

Mixtura de Weibull.

A	B	p	c_1	c_2	b_1	b_2
282,9965	4,2987	0,1294	45,6736	1836,3406	374,9432	224,9453

La diferencia de los parámetros del modelo de Bahra y el modelo propuesto se puede observar. Con esto se muestra que ambos modelos son bien diferentes tanto en su planteamiento como en los resultados numéricos. El modelo de Weibull propuesto muestra un parámetro de forma de la misma magnitud que en la mixtura de Weibull, pero el parámetro de localización es bien distinto en ambos modelos. Con estos parámetros queremos estudiar la asimetría y la curtosis de la distribución asociada al subyacente. Esto se evidencia en la gráfica de la volatilidad implícita para cada uno de nuestros modelos.

4.4.1. Volatilidad implícita

Debido a la incertidumbre en el mercado, los agentes calculan los precios de las opciones con diferentes volatilidades. Las múltiples observaciones hechas sobre el índice S&P 500 muestran que las colas de la distribución son leptocurticas y presentan mayor asimetría, por lo que la volatilidad no debe ser constante. Para la serie de precios tomada, se calcularon las volatilidades implícitas para los modelos propuestos.

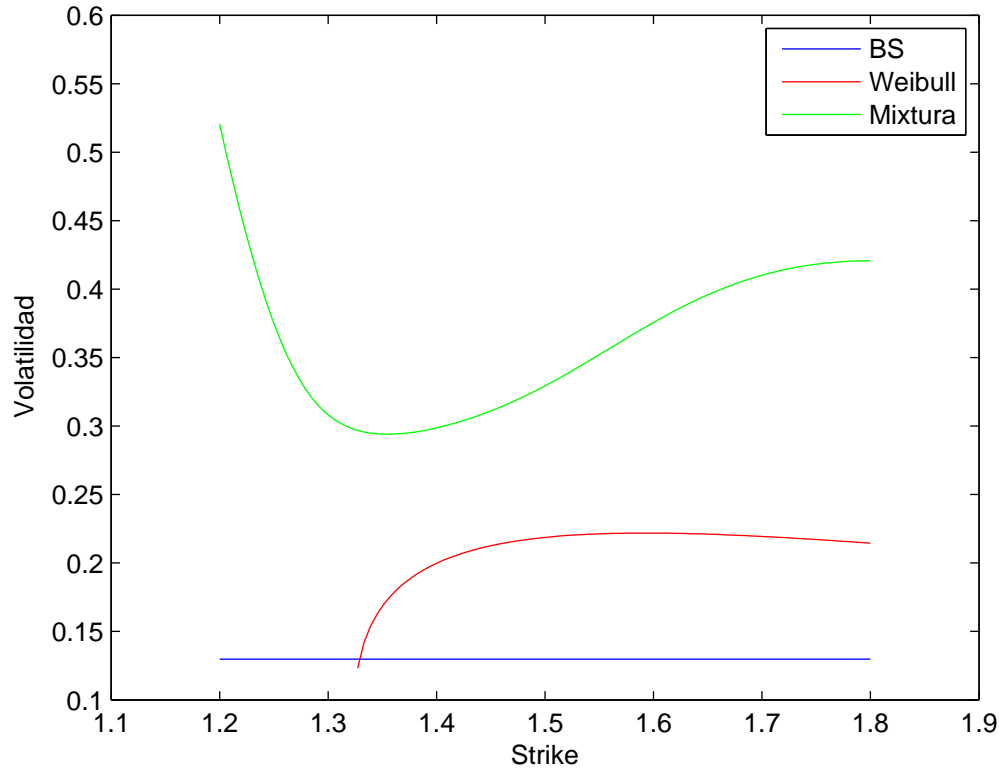


Figura 4-11: Volatilidad para precios calculados con los modelos de Weibull.

La volatilidad para Black Scholes es constante debido a que se tomó la volatilidad histórica para calcular los precios de las opciones. Pero para los modelos propuestos con distribuciones Weibull observamos sonrisa y mueca, indicando que estos no son de volatilidad constante como se esperaba. Por ejemplo en la mixtura de Weibull se observa una sonrisa y además una mayor volatilidad para los precios de ejercicio. Mientras que para el modelo de Weibull, se presenta también una mayor volatilidad que en Black Scholes pero no mayor a la mixtura y a medida que el precio de ejercicio aumenta la volatilidad también pero a un ritmo decreciente (cóncava hacia abajo). Al analizar los datos de los precios de las opciones del mercado del índice S&P 500, se analizan las volatilidades para cada uno de los modelos estudiados.

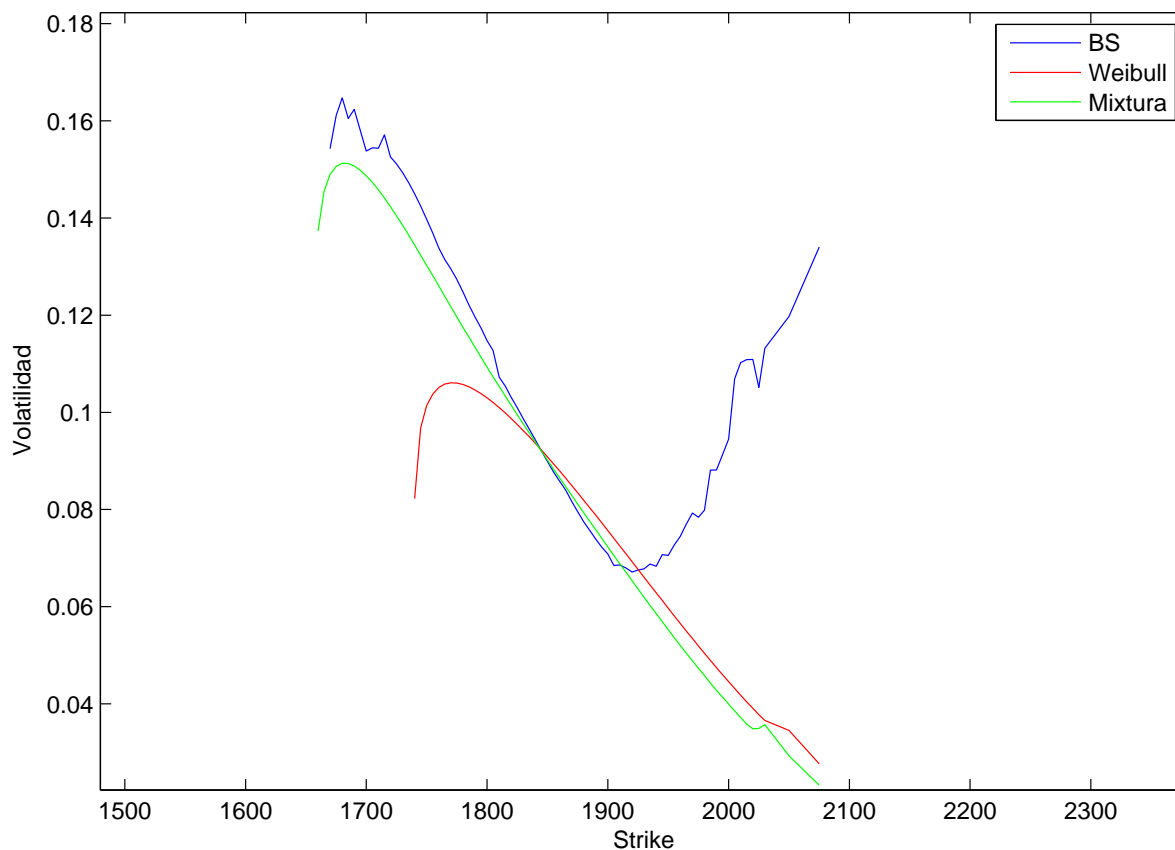


Figura 4-12: Volatilidad para precios del S&P 500.

En este caso el comportamiento es muy diferente. Se observa la sonrisa para el modelo Black Scholes, mientras que los modelos propuestos tienen una semejanza para precios de ejercicio menores, pero cuando la volatilidad empieza a crecer en Black Scholes, los modelos con Weibull siguen decreciendo en volatilidad para precios de ejercicio mayores. La volatilidad indica que el precio de la opción debe ser mayor si se usa el modelo de Black Scholes, pero no en los modelos de Weibull, por lo que se debe considerar como una buena aproximación para precios menores y cercanos al precio actual del subyacente.

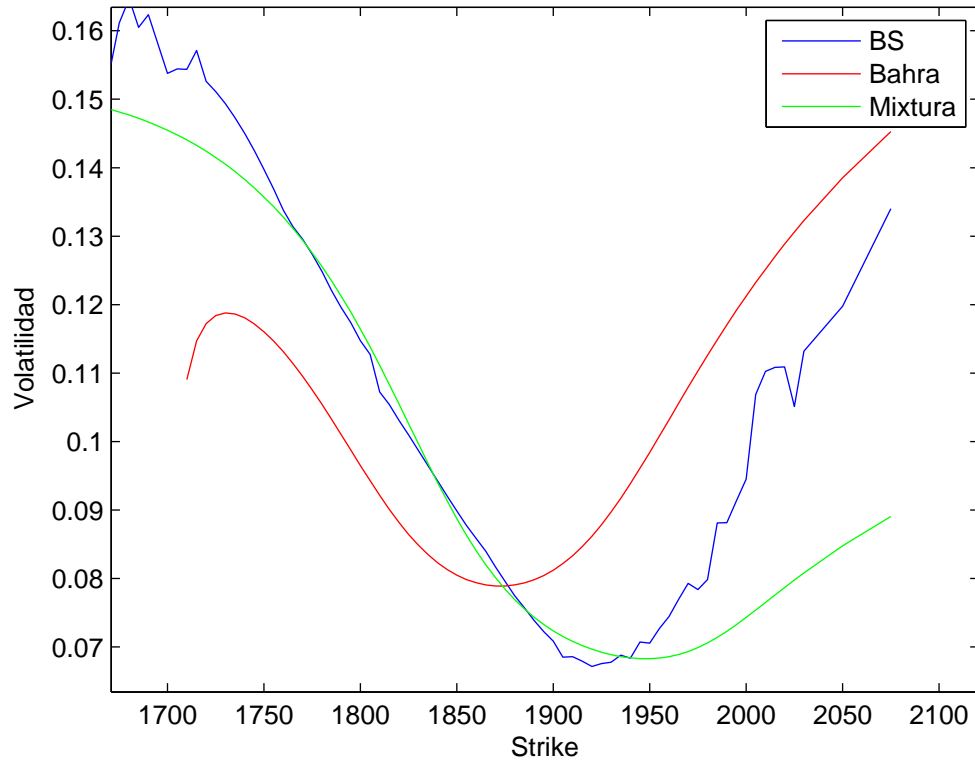


Figura 4-13: Volatilidad para precios del S&P 500.

En el caso de la mixtura de Bahra y la mixtura propuesta, se puede observar la misma sonrisa, con unos cambios interesantes. Para precios de ejercicio menores, la volatilidad en Bahra es menor que en Black Scholes y la mixtura propuesta, y en estas últimas la volatilidad se comporta casi igual. Pero cuando la volatilidad vuelve a crecer en Black Scholes, la mixtura propuesta tendrá una volatilidad menor, a diferencia de Bahra que tiene una volatilidad muy por arriba de las dos anteriores.

De los anteriores experimentos, podemos observar que los modelos propuestos son de volatilidad variable, al proponer distribuciones asimétricas y con curtosis. Para la opciones con precio de ejercicio menores, la volatilidad implícita se comporta igual que en el modelo Black Scholes, pero al aumentar el precio de ejercicio, ésta disminuye indicando menor cambio en el rango del precio del activo subyacente.

4.5. Análisis numérico de las griegas

Para los parámetros que se obtuvieron en la minimización de errores cuadráticos para los precios observados del índice S&P 500, se representa gráficamente el valor de cada griega versus el moneyness. En cada caso, se establece las griegas para el modelo de Black Scholes, mixtura de lognormales, Weibull propuesto y mixtura de Weibull.

Delta

En los cuatro modelos, la delta es creciente con respecto al moneyness. La mixtura de lognormales propuesta es menos sensible con respecto a variaciones en el precio del activo. Se observa que Black Scholes para opciones ITM la delta es mucho mayor que en los tres modelos propuestos, mientras que para opciones OTM es menor que los modelos con distribuciones Weibull. Para los modelos de Weibull y mixtura de Weibull, para opciones OTM la delta es mayor en la mixtura, caso contrario a lo que se observa en opciones ITM.

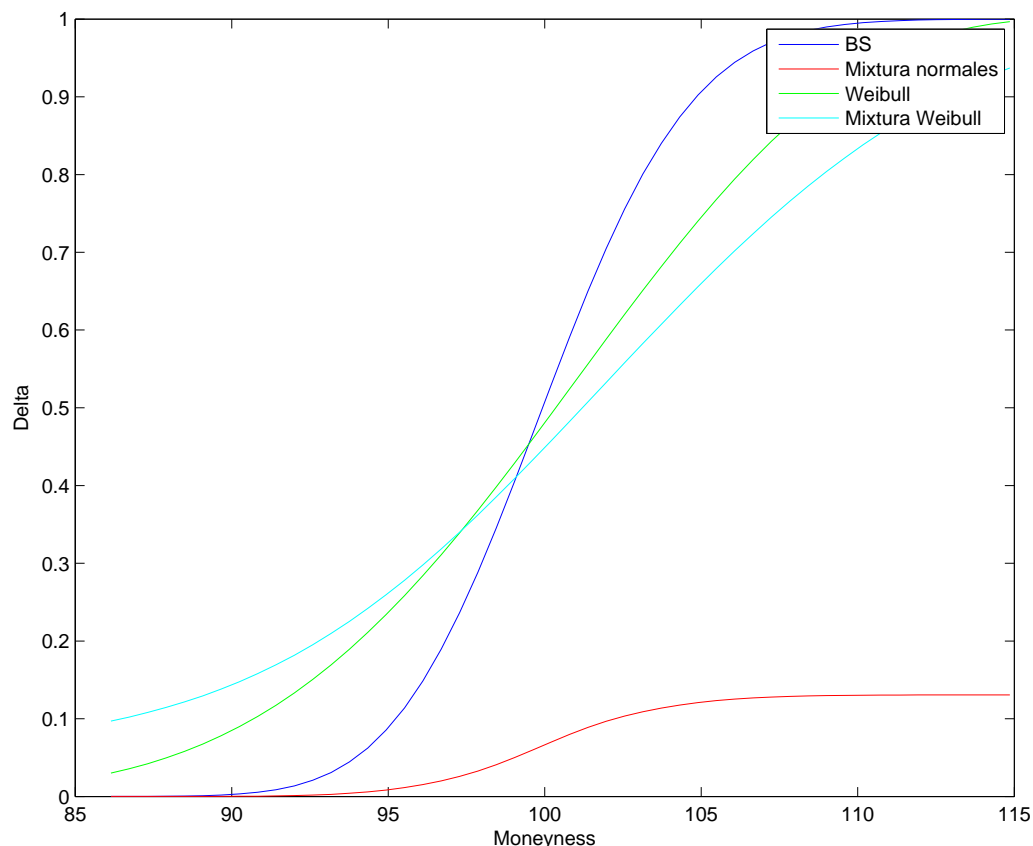


Figura 4-14: Delta para opciones sobre el índice S&P 500.

Gamma

En Black Scholes, como en las tres fórmulas que se estudian, la gamma es creciente con respecto al moneyness para opciones OTM, y decreciente para opciones ITM. La gamma en Black Scholes para moneyness del 94 % y 104 % es mayor que en cualquiera de las fórmulas planteadas, indicando mayor sensibilidad de la delta ante cambios en el precio del activo subyacente.

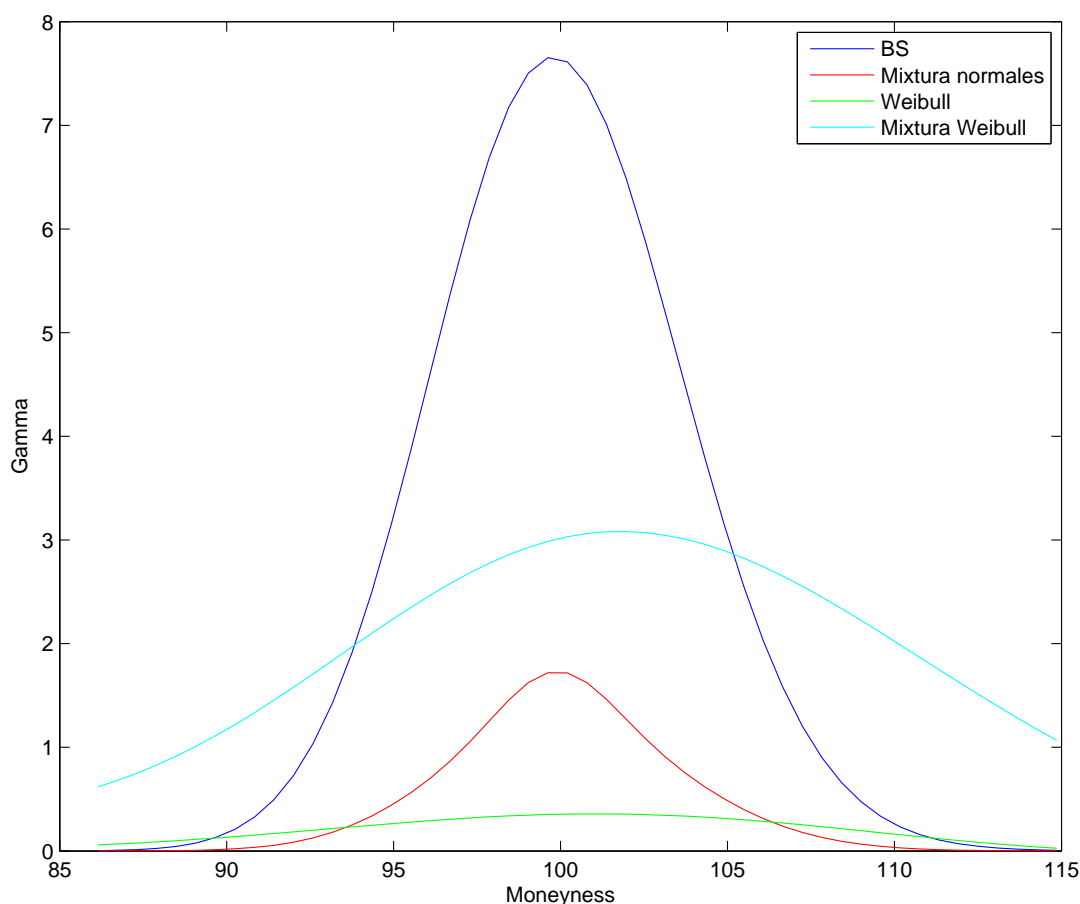


Figura 4-15: Gamma para opciones sobre el índice S&P 500.

Vega

En los modelos se observa la forma de campana de la vega, con la mixtura de lognormales muy por debajo de las demas, indicando que el precio de la opción es menos sensible ante cambios en la volatilidad. Pero para la mixtura de Weibull, la vega es creciente, así que cada vez que aumente el moneyness, mas se afecta el precio de la opción con respecto a cambios

en la volatilidad.

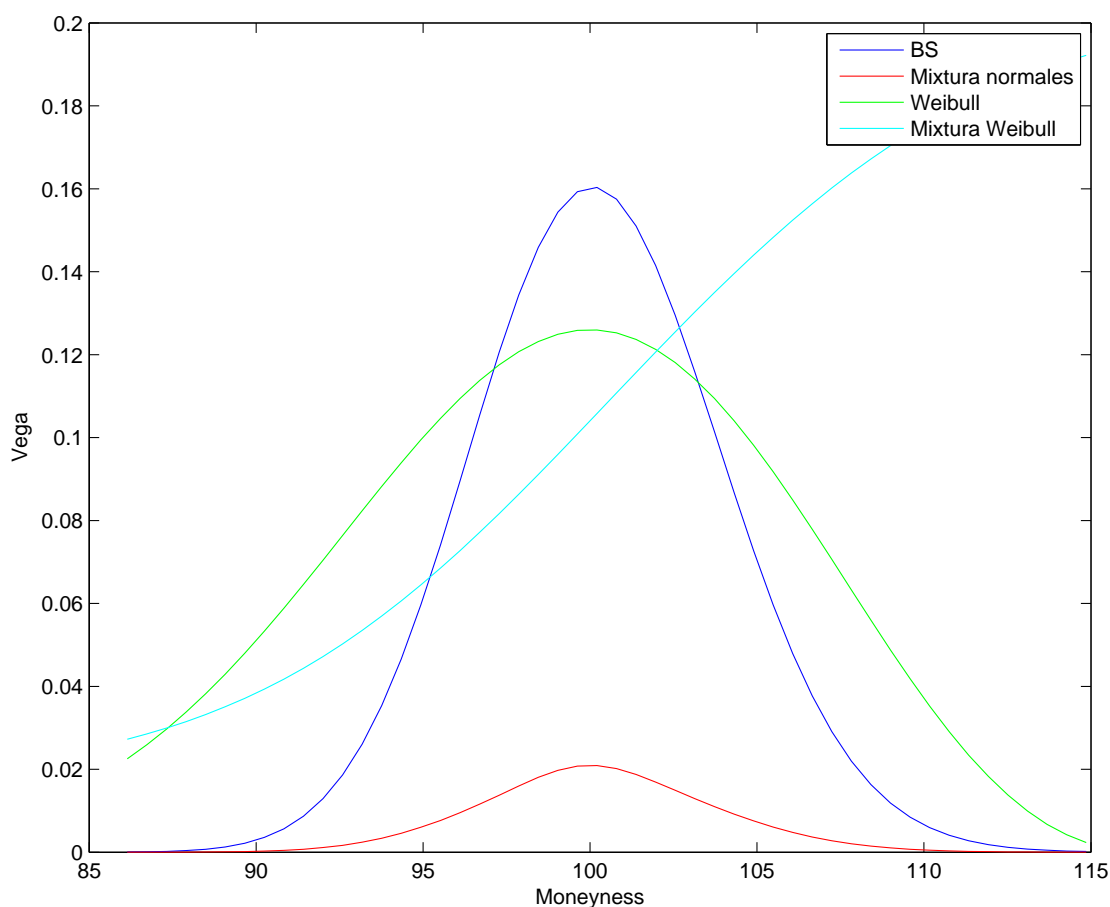


Figura 4-16: Vega para opciones sobre el índice S&P 500.

Theta

La theta mide la sensibilidad del precio de la opción con respecto al tiempo. En todos los modelos es negativa indicando que el precio de la opción decae cuando se aumenta el pasar del tiempo. Se observa que es más sensible el modelo de Weibull.

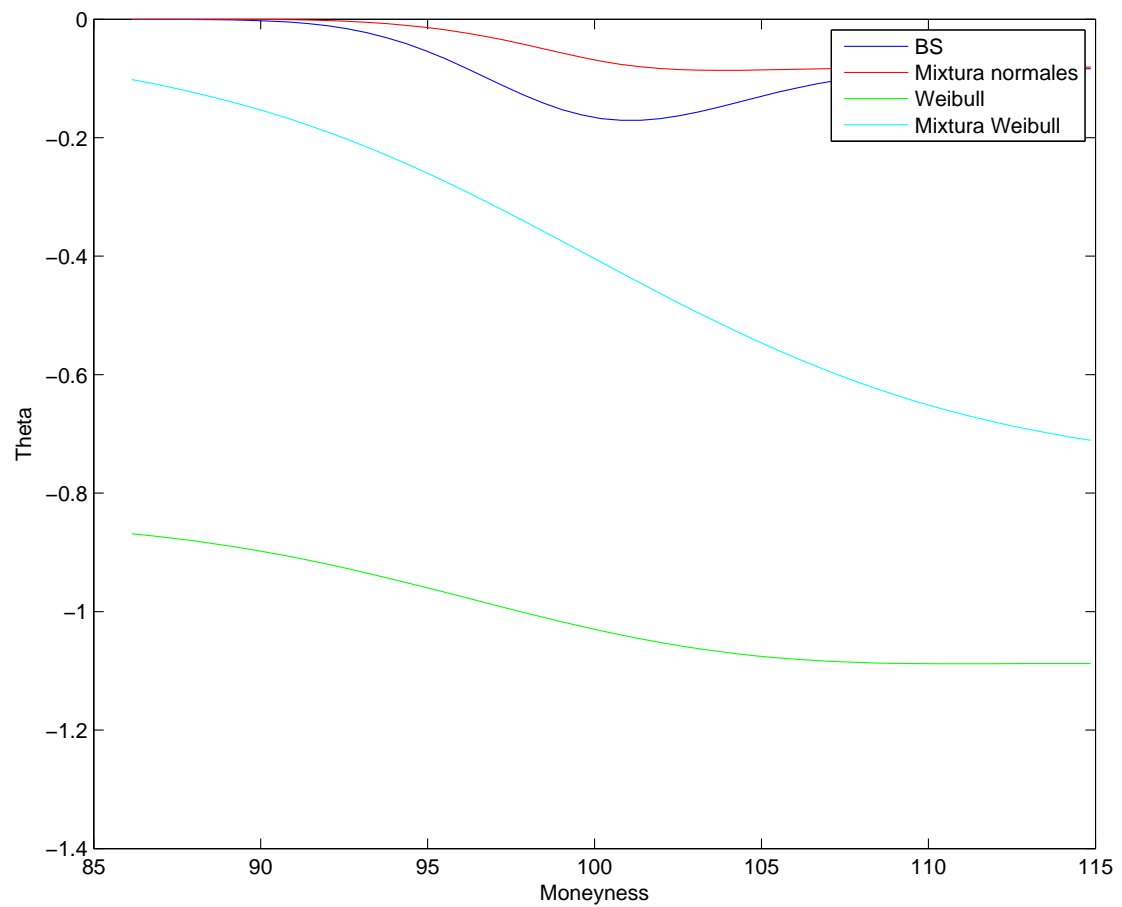


Figura 4-17: Theta para opciones sobre el índice S&P 500.

Rho

Nuevamente la mixtura de Weibull presenta mayor rho para todos los moneyness. Mixtura de lognormales y Black Scholes se comportan muy similar.

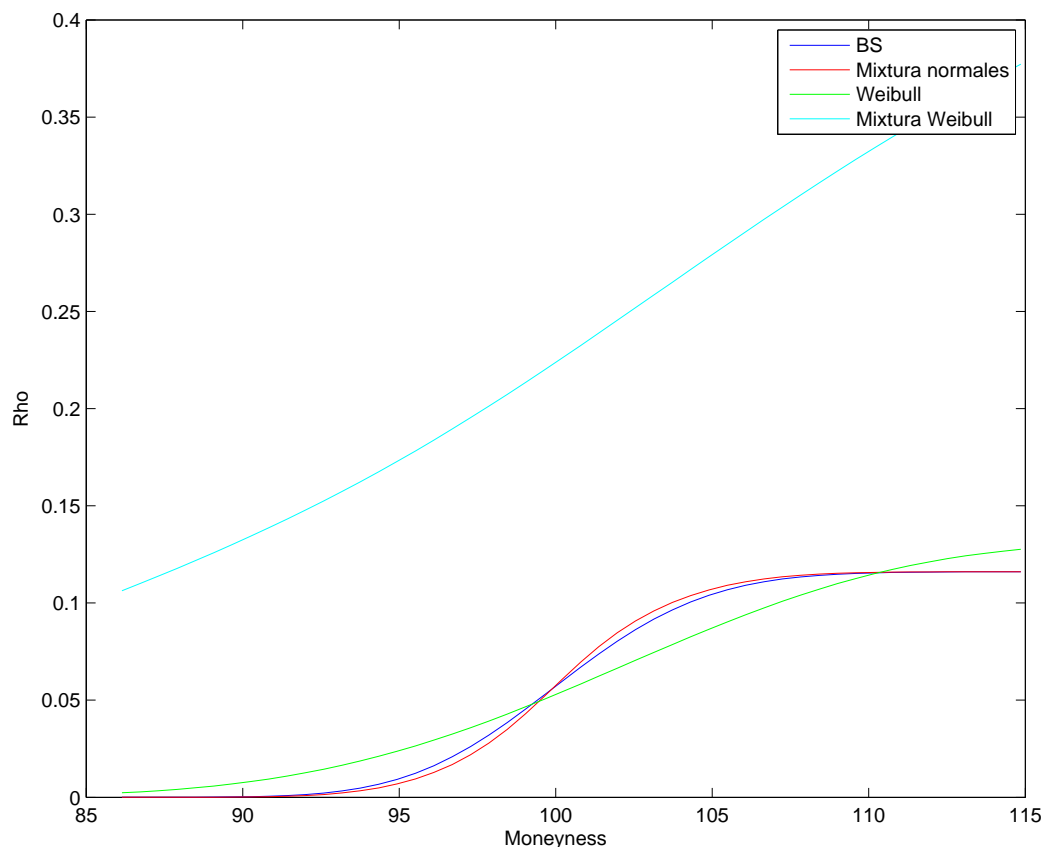


Figura 4-18: Rho para opciones sobre el índice S&P 500.

El estudio gráfico de las griegas permite comparar los modelos propuestos con el enfoque clásico de Black Scholes. La fórmula de mixtura de lognormales, es más robusta que los otros modelos con respecto a cambios en las variables que determinan el precio de las opciones de compra. El modelo más sensible es el de la mixtura de Weibull, al tener un comportamiento mas irregular en el desempeño de las griegas.

5 Conclusiones y recomendaciones

5.1. Conclusiones

A partir de los trabajos de Bahra(1997) y Savickas (2002,2005), se consideró modificar las fórmulas de valoración de opciones europeas modificando la distribución del activo subyacente. En el artículo de Jiménez et al. (2014), se considera la inclusión de dos parámetros de localización y escala.

Así, el modelo de Bahra de mixtura de distribuciones lognormales, se modifica en una fórmula que resulta como combinación lineal convexa de dos precios de tipo Black Scholes pero relacionadas entre si por la función generadora de momentos de la variable aleatoria. A partir de experimentos numéricos se muestra el mejor desempeño de la nueva fórmula al ser más económica computacionalmente.

A la fórmula de Savickas, donde se supone que la distribución del activo es Weibull se modifica, con la idea anterior al agregarle dos parámetros adicionales como en la mixtura de Bahra. De esta manera, la fórmula de Savickas queda como un caso particular de la fórmula encontrada cuando el parámetro de localización es $A = 0$ y el de escala es $B = 1$. Sin embargo, para poder usar esta fórmula se requiere de métodos numéricos para estimar sus parámetros, por lo cual su utilidad radica en encontrar la forma funcional de la distribución del activo subyacente.

Con los dos modelos anteriores, es natural pensar en una mixtura de distribuciones Weibull, por lo que se implementó una fórmula de valoración con esta distribución. Igual de flexible que la mixtura de lognormales, la mixtura de distribuciones Weibull puede presentar múltiples formas deseables en la práctica como por ejemplo bimodalidad. Computacionalmente es útil, y rápida pero mucho más sensible en cambios de sus variables de sus griegas.

Todas estas distribuciones pueden presentar colas más pesadas que una lognormal de Black Scholes, y presentar un coeficiente de asimetría negativo. Con estos resultados, las tres fórmulas que se presentan en este trabajo, cumplen las condiciones para modelar los efectos que

causan la sonrisa de la volatilidad de Black Scholes, siendo más preciso el modelo de mixtura de distribuciones lognormales.

5.2. Recomendaciones

La estimación de la volatilidad implícita se realizó numéricamente, por lo que puede ser imprecisa. Se debería encontrar una expresión explícita para poder determinar que clase de comportamiento presenta la volatilidad sin necesidad de los datos observados del mercado. La tasa de interés se consideró constante, sería importante determinar como resulta la valoración de estas opciones para diferentes supuestos sobre el comportamiento de la tasa, ya que puede proponerse determinista o estocástica. También puede generalizarse ambas fórmulas para la mixtura de n distribuciones de cierto tipo y determinar el número adecuado de componentes de la mixtura sin que el modelo pierda utilidad.

6 Apéndice

6.1. Fórmulas de valoración

A continuación se presentan las demostraciones de las fórmulas de valoración propuestas en este trabajo.

6.1.1. Modelo de mixtura de lognormales

Sea $X \sim MixN(p, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2)$ entonces su fdp se puede expresar como:

$$\begin{aligned} g_X(x) &= pg_1(x) + (1-p)g_2(x) \\ &= \frac{p}{\sigma_1} \varphi\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right) + \frac{1-p}{\sigma_2} \varphi\left(\frac{x - \mu_2}{\sigma_2}\right) \end{aligned}$$

donde $\varphi(\cdot)$ representa la fdp de una normal estándar. Si S está definida por la transformación (3-2) entonces $Y = \frac{\ln(S)-A}{B}$ y su fdp está representada por:

$$g_y\left(\frac{\ln(S) - A}{B}\right) = \frac{p}{SB\sigma_1} \varphi\left(\frac{\frac{\ln(S)-A}{B} - \mu_1}{\sigma_1}\right) + \frac{1-p}{SB\sigma_2} \varphi\left(\frac{\frac{\ln(S)-A}{B} - \mu_2}{\sigma_2}\right) \quad (6-1)$$

que es una mixtura de distribuciones lognormales. Usando la valoración neutral al riesgo (2-4) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S - K)_+] &= \int_K^\infty (S - K) g_y\left(\frac{\ln(S) - A}{B}\right) dS \\ &= \int_K^\infty (S - K) \frac{p}{SB\sigma_1} \varphi\left(\frac{\frac{\ln(S)-A}{B} - \mu_1}{\sigma_1}\right) dS \\ &\quad + \int_K^\infty (S - K) \frac{1-p}{SB\sigma_2} \varphi\left(\frac{\frac{\ln(S)-A}{B} - \mu_2}{\sigma_2}\right) dS \end{aligned}$$

Usando la sustitución $u = \frac{\ln(S)-A}{B}$, se tiene que $du = \frac{dS}{BS}$ y se define $\omega = \frac{\ln K-A}{B}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(S-K)_+] &= \int_{\omega}^{\infty} (e^{A+Bu} - K) \frac{p}{\sigma_1} \varphi\left(\frac{u-\mu_1}{\sigma_1}\right) du + \int_{\omega}^{\infty} (e^{A+Bu} - K) \frac{1-p}{\sigma_2} \varphi\left(\frac{u-\mu_2}{\sigma_2}\right) du \\ &= pe^A \int_{\omega}^{\infty} \frac{e^Bu}{\sigma_1} \varphi\left(\frac{u-\mu_1}{\sigma_1}\right) du - pK \left(1 - \Phi\left(\frac{\omega-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right) \\ &\quad + (1-p)e^A \int_{\omega}^{\infty} \frac{e^Bu}{\sigma_2} \varphi\left(\frac{u-\mu_2}{\sigma_2}\right) du - (1-p)K \left(1 - \Phi\left(\frac{\omega-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)\end{aligned}$$

Realizando las sustituciones:

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{u-\mu_1}{\sigma_1} & z_2 &= \frac{u-\mu_2}{\sigma_2} \\ dz_1 &= \frac{du}{\sigma_1} & dz_2 &= \frac{du}{\sigma_2}\end{aligned}$$

y se define para $i = 1, 2$

$$\omega_i = \frac{\frac{\ln K-A}{B} - \mu_i}{\sigma_i}$$

la expresión para el valor esperado resulta como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(S-K)_+] &= pe^A \int_{\omega_1}^{\infty} e^{B(\mu_1+\sigma_1 z_1)} \varphi(z_1) dz_1 - pK \left(1 - \Phi\left(\frac{\omega-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right) \\ &\quad + (1-p)e^A \int_{\omega_2}^{\infty} e^{B(\mu_2+\sigma_2 z_2)} \varphi(z_2) dz_2 - (1-p)K \left(1 - \Phi\left(\frac{\omega-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right) \\ &= e^A \left[pe^{B\mu_1} \int_{\omega_1}^{\infty} e^{B\sigma_1 z_1} \varphi(z_1) dz_1 + (1-p)e^{B\mu_2} \int_{\omega_2}^{\infty} e^{B\sigma_2 z_2} \varphi(z_2) dz_2 \right] \\ &\quad - K \left(p \left(1 - \Phi\left(\frac{\omega-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right) - (1-p) \left(1 - \Phi\left(\frac{\omega-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right) \right) \\ &= \frac{S_0 e^{r\tau}}{M_Y(B)} \left[pe^{B\mu_1+1/2B^2\sigma_1^2} [1 - \Phi(\omega_1^* - B\sigma_1)] + (1-p)e^{B\mu_2+1/2B^2\sigma_2^2} [1 - \Phi(\omega_2^* - B\sigma_2)] \right] \\ &\quad - K \left(p \left(1 - \Phi\left(\frac{\omega-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right) - (1-p) \left(1 - \Phi\left(\frac{\omega-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right) \right)\end{aligned}$$

Donde la última en la última expresión se cumple que:

$$\begin{aligned}S_0 e^{r\tau} &= e^A M_Y(B) \\ A &= \ln S_0 + r\tau - \ln M_Y(B) \\ \omega_i^* &= \frac{\ln K - A - B\mu_i}{B\sigma_i}\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$. Usando la propiedades de la fda de la normal estándar, y reemplazando para A se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(S - K)_+] &= \frac{S_0 e^{r\tau}}{M_Y(B)} \left[p e^{B\mu_1 + 1/2 B^2 \sigma_1^2} \Phi(B\sigma_1 - \omega_1^*) + (1 - p) e^{B\mu_2 + 1/2 B^2 \sigma_2^2} \Phi(B\sigma_2 - \omega_2^*) \right] \\
&\quad - K \left(p \Phi\left(\frac{\mu_1 - \omega}{\sigma_1}\right) - (1 - p) \Phi\left(\frac{\mu_2 - \omega}{\sigma_2}\right) \right) \\
&= p \left(\frac{S_0 e^{r\tau}}{M_Y(B)} e^{B\mu_1 + 1/2 B^2 \sigma_1^2 + r\tau} \Phi\left(\frac{\ln(S_0/K) + r\tau + B\mu_1 + B^2 \sigma_1^2 - \ln M_Y(B)}{B\sigma_1}\right) \right. \\
&\quad \left. - K \Phi\left(\frac{\ln(S_0/K) + r\tau + B\mu_1 - \ln M_Y(B)}{B\sigma_1}\right) \right) \\
&\quad + (1 - p) \left(\frac{S_0 e^{r\tau}}{M_Y(B)} e^{B\mu_2 + 1/2 B^2 \sigma_2^2 + r\tau} \Phi\left(\frac{\ln(S_0/K) + r\tau + B\mu_2 + B^2 \sigma_2^2 - \ln M_Y(B)}{B\sigma_2}\right) \right. \\
&\quad \left. - K \Phi\left(\frac{\ln(S_0/K) + r\tau + B\mu_2 - \ln M_Y(B)}{B\sigma_2}\right) \right)
\end{aligned}$$

Tomando $B = \sqrt{\tau}$, la expresión explícita para $M_Y(B)$ y reduciendo la expresión anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned}
e^{r\tau} C_t(K) &= \sum_{i=1}^2 p_i \left[\frac{e^{\ln S_0 + \mu_i \sqrt{\tau} + (r + 1/2 \sigma_i^2) \tau}}{p e^{\mu_1 \sqrt{\tau} + 1/2 \sigma_1^2 \tau} + (1 - p) e^{\mu_2 \sqrt{\tau} + 1/2 \sigma_2^2 \tau}} \Phi\left(\frac{\ln(S_0/K) + \mu_i \sqrt{\tau} + (r \sigma_i^2 \tau) - \ln M_Y(\sqrt{\tau})}{\sigma_i \sqrt{\tau}}\right) \right. \\
&\quad \left. - K \Phi\left(\frac{\ln(S_0/K) + \mu_i \sqrt{\tau} + r\tau - \ln M_Y(\sqrt{\tau})}{\sigma_i \sqrt{\tau}}\right) \right]
\end{aligned}$$

Se definen las siguientes variables:

$$\begin{aligned}
W_1 &= p + (1 - p) e^{(\mu_2 - \mu_1) \sqrt{\tau} + 1/2 (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \tau} \\
W_2 &= p e^{(\mu_1 - \mu_2) \sqrt{\tau} + 1/2 (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \tau} + (1 - p)
\end{aligned}$$

De esta manera, la valoración de la opción es:

$$\begin{aligned}
e^{r\tau} C_t(K) &= \sum_{i=1}^2 p_i \left[\frac{S_0 e^{r\tau}}{W_i} \Phi\left(\frac{\ln(S_0/K W_i) + (r + 1/2 \sigma_i^2) \tau}{\sigma_i \sqrt{\tau}}\right) \right. \\
&\quad \left. - K \Phi\left(\frac{\ln(S_0/K W_i) + (r - 1/2 \sigma_i^2) \tau}{\sigma_i \sqrt{\tau}}\right) \right]
\end{aligned}$$

Tomando la siguiente notación para $i = 1, 2$,

$$d_1^{(i)} = \frac{\ln(S_0/KW_i) + (r + 1/2\sigma_i^2)\tau}{\sigma_i\sqrt{\tau}}$$

$$d_2^{(i)} = d_1^{(i)} - \sigma_i\sqrt{\tau}$$

Se obtiene la fórmula para mixturas de lognormales.

$$C_t(K) = \sum_{i=1}^2 p_i \left[\frac{S_0}{W_i} \Phi(d_1^{(i)}) - Ke^{-r\tau} \Phi(d_2^{(i)}) \right]$$

6.1.2. Modelo de Weibull

Dada la variable aleatoria en (3-6) donde $Y \sim Wei(c, b)$ se tiene que

$$B = \frac{E(S) - A}{E(Y)}$$

como $E(Y) = b\Gamma(1 + 1/c)$ y S debe cumplir la condición de martingala $E(S) = S_0e^{r\tau}$ entonces

$$B = \frac{S_0e^{r\tau} - A}{b\Gamma(1 + 1/c)}$$

$$k = \frac{K - A}{B}$$

De tal manera que el precio de una opción de compra con vencimiento τ y precio de ejercicio K es

$$\begin{aligned} e^{r\tau}C_\tau(K) &= E[\max\{A + BY - K, 0\}] = BE[\max\{Y - k, 0\}] \\ &= B \int_k^\infty (y - k)f_Y(y) dy \\ &= B \int_k^\infty yf_Y(y) dy + B \int_k^\infty kf_Y(y) dy \\ &= B \int_k^\infty y \frac{c}{b} \left(\frac{y}{b}\right)^{c-1} \exp\left\{-\left(\frac{y}{b}\right)^c\right\} dy + B \int_k^\infty k \frac{c}{b} \left(\frac{y}{b}\right)^{c-1} \exp\left\{-\left(\frac{y}{b}\right)^c\right\} dy \\ &= B \int_k^\infty y \frac{c}{b} \left(\frac{y}{b}\right)^{c-1} \exp\left\{-\left(\frac{y}{b}\right)^c\right\} dy - Bk[1 - F(k)] \end{aligned}$$

Al hacer la sustitución $v = (y/b)^c$ y $\omega = (k/b)^c$ se obtiene lo siguiente

$$e^{r\tau}C_\tau(K) = Bb[\Gamma(1 + 1/c) - \Gamma_\omega(1 + 1/c)] - Bke^{-\omega}$$

Al reemplazar el valor de B en la anterior ecuación llegamos a la siguiente fórmula de valoración:

$$C_\tau(K) = \frac{S_0 e^{r\tau} - A}{b\Gamma(1 + 1/c)} e^{-r\tau} [b[\Gamma(1 + 1/c) - \Gamma_\omega(1 + 1/c)]] - (K - A)e^{-r\tau} e^{-\omega}$$

6.1.3. Modelo de mixtura de Weibull

Suponga que Y se distribuye con una mixtura de distribuciones Weibull de parámetros $\alpha, c_1, c_2, b_1, b_2$, entonces el valor de B dada por la transformación (3-6) está dado por

$$B = \frac{S_0 e^{r\tau} - A}{\alpha b_1 \Gamma(1 + 1/c_1) + (1 - \alpha) b_2 \Gamma(1 + 1/c_2)}$$

$$k = \frac{K - A}{B}$$

Entonces el precio de una opción europea con vencimiento τ y precio de ejercicio K viene dada por:

$$\begin{aligned} e^{r\tau} C_\tau^{mix}(K) &= E[\max\{A + BY - K, 0\}] = BE[\max\{Y - k, 0\}] \\ &= B \int_k^\infty (y - k) f_Y(y) dy \\ &= B \int_k^\infty y f_Y(y) dy + B \int_k^\infty k f_Y(y) dy \\ &= B \int_k^\infty y (\alpha f_1(y) + (1 - \alpha) f_2(y)) dy + B \int_k^\infty k f_Y(y) dy \\ &= B \int_k^\infty \alpha y \frac{c_1}{b_1} \left(\frac{y}{b_1}\right)^{c_1-1} \exp\left\{-\left(\frac{y}{b_1}\right)^{c_1}\right\} dy \\ &\quad + B \int_k^\infty (1 - \alpha) y \frac{c_2}{b_2} \left(\frac{y}{b_2}\right)^{c_2-1} \exp\left\{-\left(\frac{y}{b_2}\right)^{c_2}\right\} dy \\ &\quad + B \int_k^\infty ky (\alpha f_1(y) + (1 - \alpha) f_2(y)) dy \end{aligned}$$

Realizando las sustituciones $v_i = (y/b_i)^{c_i}$ y $\omega_i = (k/b_i)^{c_i}$ para $i = 1, 2$ y agrupando términos se tiene que

$$\begin{aligned} e^{r\tau} C_\tau^{mix}(K) &= B\alpha b_1 [\Gamma(1 + 1/c_1) - \Gamma_{\omega_1}(1 + 1/c_1)] \\ &\quad - Bk e^{-\omega_2} + B(1 - \alpha) b_2 [\Gamma(1 + 1/c_2) - \Gamma_{\omega_2}(1 + 1/c_2)] - Bk e^{-\omega_2} \end{aligned}$$

Al reemplazar el valor de B , se obtiene que

$$C_t^{mix}(k) = e^{-r\tau} \sum_{i=1}^2 p_i [b_i B (\Gamma(1 + 1/c_i) - \Gamma_{\omega_i}(1 + 1/c_i)) - (K - A)e^{-\omega_i}]$$

6.2. Griegas de las fórmulas de valoración

Se obtienen las griegas para cada modelo propuesto.

6.2.1. Griegas de la mixtura de lognormales

Dada la fórmula (2-6), se deriva con respecto a cada parámetro para obtener las griegas. Se usan las siguientes identidades.

$$\begin{aligned}
 d_2^{(i)} &= d_1^{(i)} - \sigma_i \sqrt{\tau} \\
 (d_2^{(i)})^2 &= (d_1^{(i)})^2 - 2d_1^{(i)} \sigma_i \sqrt{\tau} + \sigma_i^2 \tau \\
 &= (d_1^{(i)})^2 - 2(\ln(S/KW_i) + r\tau) + \sigma_i^2 \tau \\
 &= (d_1^{(i)})^2 \ln(Se^{r\tau}/KW_i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(d_2^{(i)}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -(d_2^{(i)})^2/2 \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -(d_1^{(i)})^2/2 + \ln(Se^{r\tau}/KW_i) \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -(d_1^{(i)})^2/2 \right\} \exp \{ \ln(Se^{r\tau}/KW_i) \} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi(d_1^{(i)}) Se^{r\tau}/KW_i
 \end{aligned}$$

Delta

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C}{\partial S} &= \sum_{i=1}^2 p_i \left(\frac{1}{W_i} \Phi(d_1^{(i)}) + \frac{S}{W_i} \frac{\partial \Phi(d_1^{(i)})}{\partial S} - Ke^{-r\tau} \frac{\partial \Phi(d_2^{(i)})}{\partial S} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^2 p_i \left(\frac{1}{W_i} \Phi(d_1^{(i)}) + \frac{S}{W_i} \varphi(d_1^{(i)}) \frac{\partial d_1^{(i)}}{\partial S} - Ke^{-r\tau} \varphi(d_2^{(i)}) \frac{\partial d_2^{(i)}}{\partial S} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^2 p_i \left(\frac{1}{W_i} \Phi(d_1^{(i)}) + \frac{S}{W_i} \varphi(d_1^{(i)}) \frac{1}{S\sigma_i\sqrt{\tau}} - Ke^{-r\tau} \varphi(d_2^{(i)}) \frac{1}{S\sigma_i\sqrt{\tau}} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^2 p_i \left(\frac{1}{W_i} \Phi(d_1^{(i)}) + \frac{S}{W_i\sigma_i\sqrt{\tau}} \varphi(d_1^{(i)}) - \frac{KSe^{-r\tau}}{KW_i} \varphi(d_1^{(i)}) \frac{e^{r\tau}}{S\sigma_i\sqrt{\tau}} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^2 \frac{p_i}{W_i} \Phi(d_1^{(i)}) = \Delta
 \end{aligned}$$

Gamma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= \sum_{i=1}^2 p_i \frac{1}{W_i} \varphi(d_1^{(i)}) \frac{\partial d_1^{(i)}}{\partial S} \\
&= \sum_{i=1}^2 p_i \frac{1}{W_i} \varphi(d_1^{(i)}) \frac{1}{S \sigma_i \sqrt{\tau}} \\
&= \frac{1}{S \sqrt{\tau}} \sum_{i=1}^2 p_i \frac{\varphi(d_1^{(i)})}{W_i \sigma_i} = \gamma
\end{aligned}$$

Vega

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial \sigma} &= \sum_{i=1}^2 p_i \left(-\frac{S}{W_i^2} \Phi(d_1^{(i)}) \frac{\partial W_i}{\partial \sigma} + \frac{S}{W_i} \varphi(d_1^{(i)}) \frac{\partial d_1^{(i)}}{\partial \sigma} - K e^{-r\tau} \varphi(d_2^{(i)}) \frac{\partial d_2^{(i)}}{\partial \sigma} \right) \\
&= \sum_{i=1}^2 p_i \left(-\frac{S}{W_i^2} \Phi(d_1^{(i)}) \frac{\partial W_i}{\partial \sigma} + \frac{S}{W_i} \varphi(d_1^{(i)}) \frac{\partial d_1^{(i)}}{\partial \sigma} - K e^{-r\tau} \varphi(d_1^{(i)}) \frac{S e^{r\tau}}{K W_i} \left(\frac{\partial d_1^{(i)}}{\partial \sigma} - \sqrt{\tau} \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^2 p_i \left(-\frac{S}{W_i^2} \Phi(d_1^{(i)}) \frac{\partial W_i}{\partial \sigma} + \sqrt{\tau} \frac{S}{W_i} \varphi(d_1^{(i)}) \right) \\
&= S \sqrt{\tau} \sum_{i=1}^2 \frac{p_i}{W_i} \varphi(d_1^{(i)}) = \nu
\end{aligned}$$

Theta Si $\tau = T - t$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial t} &= \sum_{i=1}^2 p_i \left(-\frac{S}{W_i^2} \Phi(d_1^{(i)}) \frac{\partial W_i}{\partial t} + \frac{S}{W_i} \varphi(d_1^{(i)}) \frac{\partial d_1^{(i)}}{\partial y} - K \left[r e^{-r\tau} \Phi(d_2^{(i)}) + e^{-r\tau} \frac{\partial d_2^{(i)}}{\partial t} \varphi(d_2^{(i)}) \right] \right) \\
&= \sum_{i=1}^2 p_i \left(-\frac{S}{W_i^2} \Phi(d_1^{(i)}) \frac{\partial W_i}{\partial t} + \frac{S}{W_i} \varphi(d_1^{(i)}) \frac{\partial d_1^{(i)}}{\partial t} \right. \\
&\quad \left. - K r e^{-r\tau} \Phi(d_2^{(i)}) - K e^{-r\tau} \varphi(d_1^{(i)}) \frac{S e^{r\tau}}{K W_i} \left(\frac{\partial d_1^{(i)}}{\partial t} + \sigma_i \sqrt{\tau} \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^2 p_i \left(-\frac{S}{W_i^2} \Phi(d_1^{(i)}) \frac{\partial W}{\partial t} - K r e^{-r\tau} \Phi(d_2^{(i)}) - \varphi(d_1^{(i)}) \frac{S}{W_i} \sigma_i \sqrt{\tau} \right) \\
&= \sum_{i=1}^2 p_i \left(-\frac{S}{W_i^2} \Phi(d_1^{(i)}) (p - W_i) [(\mu_2 - \mu_1) \sqrt{\tau} + 1/2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \tau] \right. \\
&\quad \left. K r e^{-r\tau} \Phi(d_2^{(i)}) - \varphi(d_1^{(i)}) \frac{S}{W_i} \sigma_i \sqrt{\tau} \right) \\
&= \theta
\end{aligned}$$

Rho

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial r} &= \sum_{i=1}^2 p_i \left(-\frac{S}{W_i} \varphi(d_1^{(i)}) \frac{\partial d_1^{(i)}}{\partial r} - K \left[-\tau e^{-r\tau} \Phi(d_2^{(i)}) + e^{-r\tau} \frac{\partial d_2^{(i)}}{\partial r} \varphi(d_2^{(i)}) \right] \right) \\
&= K \tau e^{-r\tau} \sum_{i=1}^2 p_i \Phi(d_2^{(i)}) = \rho
\end{aligned}$$

6.2.2. Griegas del modelo de Weibull

De la fórmula (3-8) y siendo $A = S_0 e^{r\tau} - B E(Y)$, se obtienen las siguientes derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega}{\partial A} &= \frac{-c}{bB} \left(\frac{K - A}{bB} \right)^{c-1} \\
\frac{\partial A}{\partial S} &= e^{r\tau} \\
\frac{\partial A}{\partial r} &= S_0 \tau e^{r\tau} \\
\frac{\partial A}{\partial \sigma} &= -E(Y) \frac{\partial B}{\partial \sigma} \\
\frac{\partial A}{\partial t} &= -S_0 r e^{r\tau} - E(Y) \frac{\partial B}{\partial t}
\end{aligned}$$

Delta

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial S} &= e^{r\tau} \left[Bb \left(-\frac{\partial}{\partial S} \Gamma_\omega(1 + 1/c) \right) - \frac{\partial}{\partial S} (K - A)e^{-\omega} + e^{-\omega}(K - A) \frac{\partial \omega}{\partial S} \right] \\
&= e^{r\tau} \left[Bb \left(-\omega^{1/c} e^{-\omega} \frac{\partial \omega}{\partial S} \right) + \frac{\partial A}{\partial S} e^{-\omega} + e^{-\omega}(K - A) \frac{\partial \omega}{\partial S} \right] \\
&= e^{-\omega} = 1 - F(K) = \Delta
\end{aligned}$$

Gamma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= -e^{-\omega} \frac{\partial \omega}{\partial S} \\
&= f(K) e^{r\tau} = \gamma
\end{aligned}$$

Vega

$$\begin{aligned}
e^{r\tau} \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= \frac{\partial B}{\partial \sigma} [b(\Gamma(1 + 1/c) - \Gamma_\omega(1 + 1/c))] + Bb \left[-\frac{\partial}{\partial \sigma} \Gamma_\omega(1 + 1/c) \right] \\
&\quad - \left[e^{-\omega} \frac{\partial(K - A)}{\partial \sigma} - (K - A) e^{-\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} \right] \\
&= \frac{\partial B}{\partial \sigma} [b(\Gamma(1 + 1/c) - \Gamma_\omega(1 + 1/c))] + Bb \left[-\omega^{1/c} e^{-\omega} \frac{\partial \omega}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial \sigma} \right] \\
&\quad - \left[e^{-\omega} \frac{\partial B}{\partial \sigma} E(Y) - (K - A) e^{-\omega} \frac{\partial B}{\partial \sigma} \frac{-c\omega}{B} \right] \\
&= \frac{\partial B}{\partial \sigma} [b(\Gamma(1 + 1/c) - \Gamma_\omega(1 + 1/c)) - e^{-\omega} E(Y)] \\
&= \sqrt{\tau} e^{-r\tau} b [\Gamma(1 + 1/c)(1 - e^{-\omega}) \Gamma_\omega(1 + 1/c)] \\
&= \nu
\end{aligned}$$

Theta

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial t} &= rC + e^{-r\tau} \frac{\partial B}{\partial t} [b(\Gamma(1 + 1/c) - \Gamma_\omega(1 + 1/c))] + Bb \left[-\omega^{1/c} e^\omega \frac{\partial \omega}{\partial t} \right] \\
&\quad - \left(-\frac{\partial A}{\partial t} e^{-\omega} - (K - A) e^{-\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) \\
&= rC + e^{-r\tau} \frac{\partial B}{\partial t} [b(\Gamma(1 + 1/c) - \Gamma_\omega(1 + 1/c))] - e^\omega \left(rS e^{r\tau} - \frac{\partial B}{\partial t} b\Gamma(1 + 1/c) \right) \\
&= rC - e^{-r\tau} [\sigma \sqrt{\tau} (b(\Gamma(1 + 1/c)(1 - e^{-\omega}) - \Gamma_\omega(1 + 1/c)))] - rS e^{-\omega} = \theta
\end{aligned}$$

Rho

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C}{\partial r} &= -\tau C + e^{-r\tau} \left[Bb \left(-\frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{\omega}(1 + 1/c) \right) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial r} (K - A) e^{-\omega} \frac{\partial}{\omega} \right] \\
 &= -\tau C + e^{-r\tau} [S\tau e^{r\tau} e^{-\omega}] \\
 &= \tau [S\Delta - C] \\
 &= \rho
 \end{aligned}$$

6.2.3. Griegas mixtura de Weibull

Delta

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C}{\partial S} &= e^{-r\tau} \sum_{i=1}^2 p_i \left[b_i B \left(-\frac{\partial}{\partial S} \Gamma_{\omega_i}(1 + 1/c_i) \right) - \left(-\frac{\partial(K - A)}{\partial S} e^{-\omega_i} - (K - A) e^{-\omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial S} \right) \right] \\
 &= e^{-r\tau} \sum_{i=1}^2 p_i \left[b_i B \left(-\omega_i^{1/c_i} e^{-\omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial S} \right) - \left(-e^{r\tau} e^{-\omega_i} + (K - A) e^{-\omega_i} \left(\frac{c_i}{b_i B} \right)^{c_i-1} e^{r\tau} \right) \right] \\
 &= e^{-r\tau} \sum_{i=1}^2 p_i \left[b_i B \left(\left(\frac{K - A}{b_i B} \right) f_i(K) e^{r\tau} \right) - \left(-e^{r\tau} e^{-\omega_i} + (K - A) f_i(K) e^{r\tau} \right) \right] \\
 &= e^{-r\tau} \sum_{i=1}^2 p_i (e^{r\tau} e^{\omega_i}) = \sum_{i=1}^2 p_i e^{\omega_i} \\
 &= \sum_{i=1}^2 p_i (1 - F_i(K)) = \Delta
 \end{aligned}$$

Gamma

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= \sum_{i=1}^2 p_i \left[-e^{\omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial S} \right] \\
 &= \sum_{i=1}^2 p_i \left[-e^{\omega_i} \frac{c_i}{b_i B} \left(\frac{K - A}{b_i B} \right)^{c_i-1} e^{r\tau} \right] \\
 &= e^{r\tau} \sum_{i=1}^2 p_i f_i(K) \\
 &= \gamma
 \end{aligned}$$

Vega

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial \sigma} &= e^{-r\tau} \sum_{i=1}^2 p_i \left[\frac{\partial B}{\partial \sigma} b_i (\Gamma(1 + 1/c_i) - \Gamma_{\omega_i}(1 + 1/c_i)) \right. \\
&\quad \left. + B b_i \left(-\frac{\partial \omega_i}{\partial \sigma} e^{-\omega_i} \omega_i^{1/c_i} - e^{-\omega_i} \frac{\partial A}{\partial \sigma} + (K - A) e^{-\omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \sigma} \right) \right] \\
&= \sqrt{\tau} e^{-r\tau} \sum_{i=1}^2 p_i [b_i (\Gamma(1 + 1/c_i) - \Gamma_{\omega_i}(1 + 1/c_i)) + E(Y) e^{-\omega_i}] \\
&= \nu
\end{aligned}$$

Theta

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial t} &= rC + e^{-r\tau} \sum_{i=1}^2 p_i \left[\frac{\partial B}{\partial t} b_i (\Gamma(1 + 1/c_i) - \Gamma_{\omega_i}(1 + 1/c_i)) \right. \\
&\quad \left. + B b_i \left(-\frac{\partial \omega_i}{\partial t} e^{-\omega_i} \omega_i^{1/c_i} - e^{-\omega_i} \frac{\partial A}{\partial t} - (K - A) e^{-\omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \right) \right] \\
&= rC + e^{-r\tau} \sum_{i=1}^2 p_i \left[\frac{\partial B}{\partial t} b_i (\Gamma(1 + 1/c_i) - \Gamma_{\omega_i}(1 + 1/c_i)) \right. \\
&\quad \left. + b_i (\Gamma(1 + 1/c_i) - \Gamma_{\omega_i}(1 + 1/c_i)) \right] \\
&= rC + e^{-r\tau} \sum_{i=1}^2 p_i [-\sigma \sqrt{\tau} b_i (\Gamma(1 + 1/c_i) - \Gamma_{\omega_i}(1 + 1/c_i)) \\
&\quad + b_i (\Gamma(1 + 1/c_i) - \Gamma_{\omega_i}(1 + 1/c_i))] \\
&= \theta
\end{aligned}$$

Rho

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial r} &= -\tau C + e^{-r\tau} \sum_{i=1}^2 p_i \left[b_i B \left(-\frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{\omega_i}(1 + 1/c_i) \right) - \left(-\frac{\partial(K - A)}{\partial r} e^{-\omega_i} - (K - A) e^{-\omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial r} \right) \right] \\
&= -\tau C + e^{-r\tau} \sum_{i=1}^2 p_i \left[b_i B \left(-\omega_i^{1/c_i} e^{-\omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial r} \right) + \left(e^{r\tau} e^{-\omega_i} + (K - A) e^{-\omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial r} \right) \right] \\
&= -\tau C + e^{-r\tau} \sum_{i=1}^2 p_i p_i e^{-\omega_i} S \tau e^{r\tau} \\
&= \tau (S\Delta - C) = \rho
\end{aligned}$$

Bibliografía

- Bahra, B. (1997), 'Implied risk-neutral probability density functions from option prices: A central bank perspective', *In: Knight, John, and Satchell, Stephen (Eds.), Forecasting Volatility in the Financial Markets, third edition* pp. 201–226. Elsevier Finance.
- Black, F. & Scholes, M. (1973), 'The pricing of options and corporate liabilities', *The journal of political economy* pp. 637–654.
- Corrado, C. J. & Su, T. (1996), 'Skewness and kurtosis in s&p 500 index returns implied by option prices', *Journal of Financial research* **19**, 175–192.
- Das, S. R. & Sundaram, R. K. (1999), 'Of smiles and smirks: A term structure perspective', *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **34**(02), 211–239.
- Falls, L. W. (1970), 'Estimation of parameters in compound weibull distributions', *Technometrics* **12**(2), 399–407.
- Groeneveld, R. A. & Meeden, G. (1984), 'Measuring skewness and kurtosis', *The Statistician* pp. 391–399.
- Harrison, J. M. & Pliska, S. R. (1981), 'Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading', *Stochastic processes and their applications* **11**(3), 215–260.
- Heston, S. L. (1993), 'A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options', *Review of financial studies* **6**(2), 327–343.
- Jarrow, R. & Rudd, A. (1982), 'Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes', *Journal of financial Economics* **10**(3), 347–369.
- Jiménez, J. A., Arunachalam, V. & Serna, G. M. (2014), 'Option pricing based on the generalised tukey distribution', *International Journal of Financial Markets and Derivatives* **3**(3), 191–221.
- Melick, W. R. & Thomas, C. P. (1997), 'Recovering an asset's implied pdf from option prices: An application to crude oil during the gulf crisis', *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **32**, 91–115.
- Rinne, H. (2009), *The Weibull Distribution: A Handbook*, Taylor & Francis Group, LLC.

-
- Rubinstein, M. (1994), 'Implied binomial trees', *The Journal of Finance* **49**(3), 771–818.
- Savickas, R. (2002), 'A simple option-pricing formula', *The Financial Review* **37**, 207–226.
- Savickas, R. (2005), 'Evidence on delta hedging and implied volatilities for the black-scholes, gamma, and weibull option pricing models', *The Journal of Financial Research* **28**(2), 299–317.
- Wilmott, P. (1995), *The mathematics of financial derivatives: a student introduction*, Cambridge University Press.